Agrégation Interne. Le 26/11/2011

Polynômes de Bernstein

Ce problème est l'occasion de revoir quelques points d'analyse réelle.
On pourra revoir les points suivants :
– espaces vectoriels des fonctions polynomiales ;
– valeurs propres, endomorphismes diagonalisables ;
– fonctions continues et uniformément continues ;
– fonctions convexes ;
– formules de Taylor avec reste intégral ;
– convergence uniforme des suites de fonctions ;
– espaces vectoriels normés ;
– norme d'un opérateur linéaire continu.
$\mathbb{R}[x]$ est l'algèbre des fonctions polynomiales à coefficients réels.
On identifiera fonction polynomiale et polynôme.

Pour tout entier naturel n, on désigne par $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré au plus égal à n et $\mathcal{B}_n = (E_k)_{0\leq k\leq n}$ en est la base canonique ($E_k(x) = x^k$ pour tout entier k compris entre 0 et n et tout réel x).

Pour tout entier naturel n non nul et tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B_{n,k}(x) = x^k (1-x)^{n-k}$$

– I –

1. Montrer que $\mathcal{B}'_n = (B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice de passage P_n de $\mathcal{B}_n$ à $\mathcal{B}'_n$ et son inverse P_n^{-1}. Expliciter le cas $n = 3$.
   À tout entier naturel non nul n et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, on associe la fonction polynomiale $B_n(P)$ définie par
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k B_{n,k}(x)$$
3. Calculer $B_n(E_0)$, $B_n(E_1)$ pour $n \geq 1$.
4. Montrer que :
   $$\forall x \in [0,1],\ 0 \leq C_n^k B_{n,k}(x) \leq 1$$
5. Vérifier que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}[x],\ B_n(xP) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(P))' + xB_n(P)$$
   où $(B_n(P))'$ est le polynôme dérivé de $B_n(P)$.
6. En déduire $B_n(E_2)$, $B_n(E_3)$ et $B_n(E_4)$ pour $n \geq 2$.
7. Démontrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k B_{n,k}(x) = 0 \qquad (1)$$
   et :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n} \qquad (2)$$

8. Montrer que l'application $B_n : P \mapsto B_n(P)$ est linéaire de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$. Vérifier que la restriction de B_n à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[x]$ est linéaire bijective de $\mathbb{R}_d[x]$ sur lui même si $0 \leq d \leq n$ et surjective de $\mathbb{R}_d[x]$ sur $\mathbb{R}_n[x]$ si $d > n$.
9. Montrer que l'endomorphisme $B_n : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.

– II –

On désigne par $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On munit cet espace de la norme :

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

À toute fonction $f \in E$, on associe la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales définie par :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k B_{n,k}$$

1. On se propose d'étudier la limite de la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
   (a) Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \in [0,1]$, on a :
   $$\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n} C_n^k B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}$$
   (b) Montrer que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'une fonction $f \in E$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers relatifs si, et seulement si, $f(0)$ et $f(1)$ sont entiers relatifs.
3.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n est une application linéaire continue de E dans E et calculer sa norme.
   (b) Calculer $\|B_n - Id\|$.
   (c) Montrer qu'il n'est pas possible d'extraire de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite qui soit convergente dans l'espace normé $\mathcal{L}_c(E)$ des applications linéaires continues de E dans E.
4. Montrer que pour toutes fonctions f, g dans E et tout entier $n \geq 1$, on a :
   $$\forall x \in [0,1],\ (B_n(f\cdot g)(x))^2 \leq B_n\left(f^2\right)(x) \cdot B_n\left(g^2\right)(x)$$

– III –

On désigne, pour tout entier $n \geq 1$, par Δ_n l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ (\Delta_n f)(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

où on a noté $\Delta_n f = \Delta_n(f)$ et $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(1)$ pour $x \geq 1 - \dfrac{1}{n}$.
On note $\Delta_n^0 = Id$ et pour tout entier $k \geq 1$, $\Delta_n^k = \Delta_n \circ \cdots \circ \Delta_n$ (k fois).

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, on a :

$$B_n(f)' = n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n f\left(\frac{k}{n}\right) C_{n-1}^k B_{n-1,k}$$

2. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, on a :

$$\forall x \in [0,1]\,,\ B_n(f)(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \Delta_n^p f(0)\, x^p$$

3. Montrer que si $f \in E$ est croissante [resp. décroissante], alors pour tout entier naturel non nul n la fonction $B_n(f)$ est croissante [resp. décroissante].
4. Montrer que si $f \in E$ est convexe alors pour tout entier naturel non nul n la fonction $B_n(f)$ est convexe sur $[0,1]$.
5. Montrer que si $f \in E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, alors la suite $\left(B_n(f)'\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.
6. Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Pour x fixé dans $[0,1]$, on désigne par ε_x la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1]\,,\ \varepsilon_x(t) = \int_x^t \left(f''(u) - f''(x)\right)(t-u)\, du$$

(a) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1]\,,\ B_n(f)(x) - f(x) = \frac{f''(x)}{2}\frac{x(1-x)}{n} + B_n(\varepsilon_x)(x)$$

(b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^4 C_n^k B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n^2}\left(3\left(1-\frac{2}{n}\right)x(1-x) + \frac{1}{n}\right)$$

(c) Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \in [0,1]$, on a :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{2n^2}$$

(d) Montrer que, pour tous x, t dans $[0,1]$, on a :

$$\varepsilon_x(t) = (t-x)^2 \int_0^1 \left(f''((1-\theta)x + \theta t) - f''(x)\right)(1-\theta)\, d\theta$$

(e) Montrer que :

$$\forall x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} n\left(B_n(f)(x) - f(x)\right) = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x)$$

– IV – Fonctions à variations bornées

Une subdivision σ d'un intervalle réel $[a,b]$ (avec $a<b$) est une suite réelle strictement croissante $(\sigma_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$, où $p\in\mathbb{N}^*$, telle que $\sigma_0=a$ et $\sigma_p=b$.

Pour toute fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et toute subdivision $\sigma=(\sigma_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ de $[a,b]$, on note :

$$\ell(\sigma,f)=\sum_{k=1}^{p}|f(\sigma_k)-f(\sigma_{k-1})|$$

On dit qu'une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est à variation bornée sur le segment $[a,b]$ s'il existe une constante réelle M telle que pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on ait $\ell(\sigma,f)\leq M$.

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est à variation bornée sur $[a,b]$, la variation totale de f sur $[a,b]$ est le réel :

$$V_a^b(f)=\sup\{\ell(\sigma,f)\mid\sigma\text{ est une subdivision de }[a,b]\}$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{VB}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ qui sont à variation bornée est un espace vectoriel.
2. Montrer que si f est à variation bornée sur $[a,b]$, alors pour tous réels $\alpha<\beta<\gamma$ dans $[a,b]$, on a :
$$V_\alpha^\beta(f)+V_\beta^\gamma(f)=V_\alpha^\gamma(f)$$
3. Montrer que pour toute fonction $f\in\mathcal{VB}([a,b],\mathbb{R})$, la fonction V définie sur $[a,b]$ par :
$$\forall x\in[a,b],\ V(x)=V_a^x(f)$$
avec la convention $V_a^a(f)=0$, est croissante.
Montrer que si f est continue à gauche en $x_0\in\,]a,b]$, [resp. à droite en $x_0\in[a,b[$], il en est alors de même de V.
4. Montrer qu'une fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est à variation bornée si, et seulement si, elle peut s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.
5. Montrer que l'application $f\mapsto V_a^b(f)$ définit une norme sur le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ formé des fonctions nulles en a.
6. Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ est à variation bornée avec :
$$V_a^b(f)=\int_a^b|f'(t)|\,dt$$
7. Montrer que si f est une fonction continue sur $[0,1]$ qui est à variation bornée il existe alors deux suites de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, P_n et Q_n sont de degré au plus égal à n, définissent des fonctions croissantes sur $[0,1]$ et la suite $(P_n-Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
8. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ est à variation bornée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $V_n=V_0^1(B_n(f))$ la variation totale de $B_n(f)$ sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ V_n\leq V_a^b(f)$$
   (b) Montrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty}V_n=V_a^b(f)$$