Agrégation interne 1997, épreuve 1

Soit n un entier supérieur on égal à 1. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) désigne l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). I_n désigne la matrice identité.

On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé muni de la norme :

$$\|(a_{ij})\| = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|.$$

Pour $p \geq 1$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices à coefficients complexes ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(C)$ à $\mathbb{C}^n$. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, élément de $M_{p,n}(\mathbb{C})$.

$GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

S_n désigne le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques réelles.

S_n^+ désigne le sous-ensemble de S_n formé des matrices réelles symétriques a valeurs propres positives ou nulles.

S_n^{++} est le sous-ensemble de S_n^+ formé des matrices symétriques réelles a valeurs propres strictement positives.

$\mathbb{C}_n[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (resp. le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels) de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $\mathbb{C}_n[X]$ est un espace vectoriel normé avec :

$$\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right\| = \sup_{0\leq i\leq n} |a_i|.$$

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par χ_A le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $P_{m,A}$ le polynôme minimal de A. On rappelle que $P_{m,A}$ est le polynôme unitaire générateur de l'idéal I de $\mathbb{C}[X]$ défini par $I = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A) = 0\}$ et que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si $P_{m,A}$ est à racines simples.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on rappelle qu'il existe un couple unique (D, N) dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ où D est diagonalisable et N est nilpotente, vérifiant : $DN = ND$ et $A = D + N$.

On rappelle que, si M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note :

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M^i}{i!}$$

et que si A et B appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et vérifient $AB = BA$ alors on a l'égalité $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spec}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A.

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$ on pose $\Im(z) = b$.

On désigne par $\mathfrak{S}_n$ le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Partie I

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\Phi_{A,B}$ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\Phi_{A,B}(X) = AX + XB$.

1. Montrer que, si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spec}(X) = \mathrm{Spec}({}^tX)$.
2. Soit $b \in \mathrm{Spec}(B)$, $a \in \mathrm{Spec}(A)$. Montrer qu'il existe $(V, W) \in (\mathbb{C}^n - \{0\})^2$ tel que ${}^tWB = b\,{}^tW$, $AV = aV$. Calculer $\Phi_{A,B}(V\,{}^tW)$. Que peut-on en déduire pour l'application $\Phi_{A,B}$?
3. (a) Soient $0 \neq Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels $\Phi_{A,B}(Y) = \lambda Y$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$. En utilisant une factorisation de $P_{m,A}$, montrer qu'il existe $a \in \mathrm{Spec}(A)$ tel que $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible.

(b) Déduire de ce qui précède que :

$$\mathrm{Spec}\left(\Phi_{A,B}\right) = \mathrm{Spec}\left(A\right) + \mathrm{Spec}\left(B\right).$$

4. Que peut-on dire de $\mathrm{Spec}\left(\Phi_{A,A}\right)$ si A appartient S_n^{++} ?

5.

(a) Soit $X_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $1 \leq i \leq n$ où i est situé à la $i^{ème}$ ligne. Calculer $X_i\,{}^tX_j$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

(b) Montrer que si A et B sont diagonalisables alors $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

6.

(a) Déterminer le polynôme minimal de $\Phi_{A,0}$ en fonction de celui de A ainsi que celui de $\Phi_{0,B}$ en fonction de celui de B.

(b) En déduire une nouvelle démonstration de la question **I. 5. (b)**.

(c) Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ avec $d_i \neq d_j$ pour $i \neq j$. Trouver la dimension de $\ker\left(\Phi_{D,-D}\right)$.

Partie II

Soit h l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $h(X) = X^2$.

1. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que sa différentielle au point X est l'application $H \longmapsto XH + HX$.
2. On suppose dans cette question uniquement que $n \geq 2$ et on désigne par $\tilde{h}$ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\tilde{h}(X) = X^2$. Montrer que $\tilde{h}$ n'est pas surjective. (On pourra construire et utiliser une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^n = 0$, $X^{n-1} \neq 0$, en montrant qu'elle n'a pas d'antécédent par $\tilde{h}$).
3. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = I_n$. Montrer que X est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que X est semblable à $X' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ où $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \cdots, n$. Le résultat demeure-t-il pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
4. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout g de G on ait $g^2 = I_n$.

   (a) Montrer que G est commutatif.

   (b) On désigne par $\mathrm{Vect}(G)$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G.

   i. Montrer qu'il existe $(g_1, \cdots, g_p)$ appartenant à G^p tel que

   $$\mathrm{Vect}(G) = \mathrm{Vect}\{g_1, \cdots, g_p\}.$$

   ii. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout g de G la matrice $P^{-1}gP$ soit diagonale.

   (c) Déduire du b) que G est fini et qu'il existe un entier $m \leq n$ tel que l'ordre de G soit 2^m.

5. Montrer que les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{C})$ sont isomorphes si et seulement si $m = n$. (On pourra supposer que $n > m$ et qu'il existe un isomorphisme de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $GL_m(\mathbb{C})$ et introduire un sous-groupe approprié de $GL_n(\mathbb{C})$.
6. Montrer le même résultat pour les groupes $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_m(\mathbb{R})$. Les groupes $GL_n(\mathbb{C})$ et $GL_m(\mathbb{R})$ sont-ils isomorphes ?

Partie III

On désigne par $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et soit s l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$s(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

1. Montrer que s est une application continue et surjective.
2. Soit $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_n = 1$. Montrer que si z est une racine de P dans $\mathbb{C}$ on a $|z| \leq 1 + \|P\|$ (on pourra envisager les deux cas $|z| \leq 1$ et $|z| > 1$).
3. Montrer que l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$A \longmapsto (-1)^n \chi_A,$$

   est continue.
4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes appartenant à $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) - s(\Omega)$ convergente vers $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$. Soit, pour tout entier naturel k, $(\lambda_{1,k}, \cdots, \lambda_{n,k})$ tel que $s(\lambda_{1,k}, \cdots, \lambda_{n,k}) = P_k$.
   (a) Montrer que, pour tout entier k et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\left(\lambda_{\sigma(1),k}, \cdots, \lambda_{\sigma(n),k}\right)$ n'appartient pas à Ω et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout i et tout k, $|\lambda_{i,k}| \leq M$.
   (b) Déduire du (a) que $P \notin s(\Omega)$.
5. Montrer que si ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres appartiennent à ω est un ouvert non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
6. Soit U l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres vérifient l'inégalité $|\Im(\lambda)| < \pi$.
   (a) Montrer que U est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Soit $\mathcal{N} = \left\{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists\, p(N) \in \mathbb{N}\,;\ N^{p(N)} = 0\right\}$. On considère l'ensemble $\mathcal{L} = \{I_n + N \mid N \in \mathcal{N}\}$. Pour $v = I_n + N$ appartenant à $\mathcal{L}$ on pose :

$$\ln(v) = \ln(I_n + N) = \sum_{q=1}^{p(N)-1} \frac{(-1)^{q+1} N^q}{q}.$$

      i. Montrer que si X appartient à $\mathcal{N}$, $\exp(X) \in \mathcal{L}$.
      ii. Soient X appartenant à $\mathcal{N}$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$f(t) = \ln(\exp(tX)).$$

      Montrer que f est dérivable, que $f'(t) = X$, puis que pour tout t réel $f(t) = tX$. (On pourra écrire $\exp(tX) = I_n + Z(t)$).
      iii. En Déduire que pour tout X appartenant à $\mathcal{N}$:

$$\ln(\exp(X)) = X.$$

   (c) Montrer que si D et D' appartiennent à U, sont diagonalisables et telles que $\exp(D) = \exp(D')$, alors $D = D'$. (On pourra montrer que D et D' ont les mêmes sous-espaces propres).

(d) Montrer que exp est injective sur U. (On pourra décomposer une matrice M de U en la somme de deux éléments appropriés et utiliser **III. 6. (b) (iii)** et **III. 6. (c)**).

7. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes.

   (a) Montrer que $\mathcal{D}_1$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en utilisant **3.** et **4**.

   (b) Quel est l'intérieur de $\mathcal{D}$?

   (c) Expliciter le polynôme caractéristique de $\Phi_{A,0}$ en fonction de χ_A si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (d) L'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à A associe son polynôme minimal $P_{m,A}$ est-elle continue sur $\mathcal{D}_1$? Est-elle continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

8. (a) Soit P appartenant à $U_n(\mathbb{R}_n[X])$ (P est unitaire de degré n à coefficients réels). Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ (i.e. a toutes ses racines réelles) si et seulement si pour tout z de $\mathbb{C}$ on a $|P(z)| \geq |\Im(z)|^n$.

   (b) On désigne par $\mathcal{D}'$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Caractériser l'adhérence de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (c) En déduire que $\mathcal{D}'$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Soit $p \geq 1$ et q deux entiers naturels. On considère l'ensemble F des matrices A appartenant à $M_p(\mathbb{C})$ et de rang strictement supérieur à q. Montrer que F est un ouvert de $M_p(\mathbb{C})$.

10. Montrer que pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\ker(\Phi_{A,-A})$ est supérieure ou égale à n.

11. En déduire que, si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

$$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}$$

    est supérieure ou égale à n.

12. Soit Φ l'application de S_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(X) = X^2$.

    (a) Montrer que $g = \Phi|_{S_n^+}$ est injective.

    (b) A l'aide de **III. 5.** montrer que S_n^{++} est un ouvert de S^n. Montrer que $\Phi|_{S_n^{++}}$ est un C^1-difféomorphisme de S_n^{++}.