n désigne un entier naturel non nul.

Ce problème a pour objet de démontrer que tout compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide est inclus dans un unique ellipsoïde de volume minimal.

La partie I est indépendante du reste du problème.

Notations et définitions

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices à n lignes et à p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$, et on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- $GL_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si n et p sont deux entiers naturels non nuls, $0_{n,p}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.
- Pour $M = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \{1,\cdots,n\}$, on note M_k la matrice $(m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\1\leq j\leq k}} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tM = M$.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$. On notera $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On rappelle qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive lorsque pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0_{n,1}\}$, ${}^tXMX > 0$. On notera $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
- On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathbb{R}^n$) est un **ellipsoïde**, s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathcal{E} = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tXAX \leq 1\}$$

  Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ellipsoïde $\{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tXAX \leq 1\}$ sera noté $\mathcal{E}_A$.

Partie I : cas d'un triangle équilatéral

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$.
Cette partie a pour objet de démontrer l'existence et l'unicité d'une ellipse d'aire minimale circonscrite à un triangle équilatéral.
Le terme ellipse désigne une courbe bornée admettant dans un repère une équation du type
$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$ avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

1. Étant donné un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points :
$$I(1,0)\,,\ J\left(-\frac{1}{2}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } K\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
   (a) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O et d'équation $ax^2+by^2+2cxy+dx+ey+f=0$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Montrer que $d = e = 0$.
   (b) Montrer que le cercle circonscrit à IJK est l'unique ellipse de centre O contenant les points I, J et K.
2. Soit ABC un triangle équilatéral et R le rayon de son cercle circonscrit. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de R.
3. Résoudre le système d'équations $\begin{cases}\cos(y-x) = \cos x\\ \cos(y-x) = \cos y\end{cases}$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ telle que $0 < x < y < 2\pi$.
4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $R > 0$. On note O son centre.
   (a) Étant donné un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(R,0)$, $B(R\cos\beta, R\sin\beta)$ et $C(R\cos\gamma, R\sin\gamma)$, avec $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$.
      i. Montrer que l'aire du triangle ABC est $\dfrac{R^2}{2}(\sin(\gamma-\beta) - \sin\gamma + \sin\beta)$. Dans la suite, cette aire sera notée $f(\beta,\gamma)$.

ii. Montrer que f admet un maximum atteint en un point (β_0, γ_0) tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$.

iii. Déterminer β_0 et γ_0. Quelle est alors la nature du triangle obtenu ?

(b) Déterminer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$.

5. Démontrer que si $\mathcal{C}$ est un cercle d'aire $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle $\mathcal{T}$ d'aire $\mathcal{A}_\mathcal{T}$, alors $\dfrac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} \geq \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.
6. Montrer que parmi les ellipses circonscrites au triangle IJK défini dans la question 1, il en existe une et une seule délimitant une surface d'aire minimale. *On rappelle que toute ellipse peut-être transformée en un cercle par une affinité orthogonale et qu'une affinité orthogonale conserve les rapports d'aires.*

Partie II : étude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, alors $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de A sont strictement positives.
   (b) Enoncer le théorème permettant d'affirmer qu'il existe des matrices D diagonale et P orthogonale telles que $A = {}^tPDP$.
   (c) Montrer que, si les valeurs propres de A sont strictement positives, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tQQ$.
4. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(A) > 0$. La réciproque est-elle vraie ?
5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\det(A_k) > 0$.
6. Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que
$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ O_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$$
7. Etant donné un entier naturel m non nul, $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ désignent $m+1$ nombres réels. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ définie par :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{pmatrix}$$
   (a) Démontrer par récurrence sur m que $\det(M) = \alpha - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$.
   (b) Pour $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, expliciter ${}^tXMX$ en fonction des composantes de X et en déduire que si $\det(M) > 0$ alors $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.
8. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ $\det(A_k) > 0$, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   On pourra raisonner par récurrence sur n et utiliser les questions 6. et 7.
9. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme.

Partie III : inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

III.1 Réduction simultanée

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application Φ_A qui à $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ associe $\Phi_A(X, Y) = {}^tXAY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si les colonnes d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour Φ_A, alors ${}^tPAP = I_n$.
3. Montrer que l'application f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe $f(X) = A^{-1}BX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, symétrique pour Φ_A.
   Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$?
4. En déduire qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telles que $A = {}^tQQ$ et $B = {}^tQDQ$.
   Que représentent les coefficients diagonaux de D ?
5. On suppose que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont inférieures ou égales à 1.
   (b) En déduire que si $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ alors $A = B$.

III.2 Convexité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si u_1 et u_2 sont deux éléments de E, le segment $[u_1; u_2]$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $tu_1 + (1-t)u_2$ lorsque t décrit $[0; 1]$.
On rappelle qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est convexe lorsque, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$,$[u_1; u_2] \subset \mathcal{C}$.
Étant donnée une partie $\mathcal{C}$ de E convexe, une application $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est dite strictement convexe lorsque pour tout $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2$ tel que $u_1 \neq u_2$ et pour tout $t \in]0; 1[$, $\varphi(tu_1 + (1-t)u_2) < t\varphi(u_1) + (1-t)\varphi(u_2)$.

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe.
2. On suppose de plus E normé. On considère une partie $\mathcal{C}$ non vide, convexe et compacte de E et $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une application strictement convexe et continue sur $\mathcal{C}$.
   (a) Montrer que φ admet un minimum, atteint en un unique point.
   (b) Montrer que φ admet un maximum. Sans justification, donner un exemple pour lequel ce maximum est atteint en une infinité de points.

III.3 Volume d'un ellipsoïde

On admet qu'il existe une constante k_n ne dépendant que de n telle que, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, le volume de $\mathcal{E}_A$ est $\dfrac{k_n}{\sqrt{\det(A)}}$.
On s'intéresse à la fonction ν définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par $\nu(A) = \dfrac{1}{\sqrt{\det(A)}}$.

1. Déterminer k_2 et k_3.
2. Montrer (sans considération de volume) que, si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$, alors $\nu(A) \leq \nu(B)$.
3. Montrer que ν est continue sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. (a) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $t \in]0; 1[$, $\ln(t + (1-t)\lambda) \geq (1-t)\ln(\lambda)$. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\lambda = 1$.
   On pourra, pour t fixé dans $]0\,;1[$, étudier la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :
   $$\psi(\lambda) = \ln(t + (1-t)\lambda) - (1-t)\ln\lambda.$$
   (b) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in [0; 1]$, $e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b$.
   (c) i. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   ii. Soient A et B appartenant à $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. En reprenant les notations de III.1.4, exprimer $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(tA + (1-t)B)$ en fonction de $\det(Q)$ et des coefficients diagonaux de D.
   iii. Montrer que ν est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
5. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
   On considère l'ensemble $M(\mathcal{E}_A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \exists X \in \mathcal{E}_A,\ Y = MX\}$ qu'on pourra aussi écrire sous la forme $\{MX;\ X \in \mathcal{E}_A\}$. Montrer que $M(\mathcal{E}_A)$ est un ellipsoïde ; déterminer la matrice symétrique définie positive B telle que $M(\mathcal{E}_A) = \mathcal{E}_B$. Donner une relation entre le volume de $\mathcal{E}_A$ et celui de $M(\mathcal{E}_A)$.

III.4 Inclusion dans un ellipsoïde

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne usuelle et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée :
si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||X|| = \sqrt{{}^tXX}$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \sup\limits_{X\neq 0} \dfrac{||AX||}{||X||}$.

On considère un compact K de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'intérieur non vide. Il existe alors $X_0 \in K$ et ε un réel strictement positif tels que la boule fermée $B(X_0, \varepsilon)$ soit incluse dans K.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $K \subset \mathcal{E}_A$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}_A$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On pourra utiliser que $X \mapsto ({}^tXAX)^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que si $X \in \mathcal{E}_A$, alors $-X \in \mathcal{E}_A$.
   (c) Montrer que pour tout $X \in B(0,\varepsilon)$, $X_0 + X$ et $-X_0 + X$ appartiennent à $\mathcal{E}_A$ et en déduire que $B(0,\varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$.
   (d) Montrer que, si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.
   On pourra considérer un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ.
   (e) Montrer que $|||A||| \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.
2. Montrer qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ tel que $K \subset \mathcal{E}$.

   Dans la suite, on fixe $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $K \subset \mathcal{E}_{A_0}$ et on considère l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \ / \ \det(A) \geq det(A_0) \ \text{ et } \forall X \in K,\ 0 \leq {}^tXAX \leq 1\}$$

3. (a) Montrer que $\mathcal{M}$ est inclus dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{M}$ est borné.
   (c) Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que $\mathcal{M}$ est une partie convexe.
   On pourra utiliser la convexité de ν sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ démontrée en III.3.4.
4. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde $\mathcal{E}$ de volume minimal contenant K.
5. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / x \in [-1; 1] \text{ et } y = 0\}$.
   (a) Quel est l'intérieur de K ?
   (b) Existe-t-il une ellipse d'aire minimale contenant K ?
