Agrégation Interne 1993 : deuxième épreuve.

Remarque : l'énoncé a été très légèrement modifié pour correspondre au programme des classes préparatoires et pour corriger une erreur de la partie III.

Le problème a pour objet d'étudier certaines propriétés et certaines utilisations de la **Transformation de Laplace**.

$\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des applications continues par morceaux de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$ et sommables sur $]0,1]$.

Pour tout $f \in \mathcal{E}$, on note $\mathcal{A}_f$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que l'application $t \mapsto e^{-zt}f(t)$ soit sommable sur $]0,+\infty[$. Pour $z \in \mathcal{A}_f$, on pose $F(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des $f \in \mathcal{E}$ telles que $\mathcal{A}_f \neq \emptyset$.

Pour $f \in \mathcal{F}$, F s'appelle la **transformée de Laplace** de f et on note $F = \mathcal{L}_f$.

Les parties **III** et **IV** sont indépendantes.

PARTIE I

Dans cette partie, on se propose d'expliciter les transformées de Laplace de certaines applications f.

1. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $z = x_0 + iy_0 \in \mathcal{A}_f$.

   a. Montrer que tout $z = x + iy$ tel que $x \geq x_0$ est également élément de $\mathcal{A}_f$.

   b. Montrer que F est continue dans le demi-plan

$$\Pi_{z_0} = \{z = x + iy,\ x \geq x_0\}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose dans cette question que $f(t) = t^n$.

   a. Déterminer $\mathcal{A}_f$.

   b. Pour tout $z \in \mathcal{A}_f$, expliciter $F(z)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$. On suppose dans cette question que $f(t) = t^n e^{-at}$.

   a. Déterminer $\mathcal{A}_f$.

   b. Pour tout $z \in \mathcal{A}_f$, expliciter $F(z)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette question que $f(t) = t^n e^{-at} e^{i\omega t}$.

   a. Déterminer $\mathcal{A}_f$.

   b. Pour tout $z \in \mathcal{A}_f$, expliciter $F(z)$.

   c. En déduire l'expression, lorsqu'elles ont un sens, des intégrales :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\cos\omega t\,\mathrm{d}t \qquad J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$
$$I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-zt}\cos\omega t\,\mathrm{d}t \qquad J_1 = \int_0^{+\infty} te^{-zt}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

PARTIE II

Dans cette partie, on se propose d'établir certaines propriétés de la transformation de Laplace.

1. Soit $f \in \mathcal{F}$ continue sur $]0, +\infty[$ et soit $s \in \mathcal{A}_f$ et $a > 0$. Montrer que :

$$F(s+a) = a \int_0^{+\infty} g(t) e^{-at} \, \mathrm{d}t$$

où, pour tout $t \geq 0$, $g(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-su} f(u) \, \mathrm{d}u$.

2. Sous les mêmes conditions, montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(s+na) = 0$, alors on peut établir successivement les résultats suivants :

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) u^n \, \mathrm{d}u = 0$.

   b. Pour tout $t \geq 0$, $g(t) = 0$.

3. En déduire que si $f \in \mathcal{F}$ est continue et telle que $\mathcal{L}_f = 0$, f est la fonction nulle.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{E}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

   (i) f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, +\infty[$;

   (ii) pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $f^{(k)} \in \mathcal{F}$;

   (iii) pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et tout $z \in \mathcal{A}_{f^{(k)}}$, $e^{-zt} f^{(k)}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Montrer qu'alors, pour tout $z \in \displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} \mathcal{A}_{f^{(k)}}$, on a l'égalité :

$$\mathcal{L}_{f^{(n)}}(z) = z^n \mathcal{L}_f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

PARTIE III

Dans cette partie, on se propose, à l'aide de transformation de Laplace, de retrouver certains résultats classiques concernant les fonctions "gamma" (notée Γ) et "bêta" (notée B) respectivement définies par :

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \\ \mathrm{B}(\alpha, \beta) &= \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} \, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\Gamma(z)$ est défini pour tout $z = x + iy$ tel que $x > 0$.

2. Pour tout réel $s > 0$ et tout réel $k > -1$, exprimer, au moyen de la fonction Γ, $\mathcal{L}_f(s)$ où $f(t) = t^k$. Comparer avec le résultat obtenu en I.2.

3. Déterminer l'ensemble des couples (α, β) de réels tels que $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ converge.

4. g et h étant deux applications appartenant à $\mathcal{E}$ et continues sur $]0, +\infty[$, on considère l'application f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \int_0^t g(u) h(t-u) \, \mathrm{d}u.$$

On peut démontrer, **et on admettra**, que pour tout réel $s \in \mathcal{A}_g \cap \mathcal{A}_h$, $s \in \mathcal{A}_f$ et $\mathcal{L}_f(s) = \mathcal{L}_g(s)\dot{\mathcal{L}}_h(s)$.

En déduire les résultats suivants :

a. Pour tout couple (α, β) de réels strictement positifs, on a :

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

b. Pour tout réel α tel que $0 < \alpha < 1$, on a :

$$\mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

5. Soit w la fonction périodique de période 2π définie pour $x \in]-\pi, \pi]$ par

$$w(x) = \cos \alpha x$$

où α est un réel tel que $0 < \alpha < 1$.

a. Calculer les coefficients de Fourier de w.

b. Montrer que $\dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} + 2\alpha \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2}$.

c. Montrer que $\mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t$, puis que $\mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} + t^{-\alpha}}{1+t}\, \mathrm{d}t$.

d. En déduire que $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

PARTIE IV

Dans cette partie, on se propose, à l'aide de la transformation de Laplace, de résoudre une équation différentielle et un système différentiel. On pourra à cet effet utiliser les parties I et II.

1. On considère le problème de Cauchy :

$$(1) \quad \begin{cases} u''' - 5u'' + 8u' - 4u = t \cos t \\ u''(0) = u'(0) = u(0) = 1 \end{cases}$$

On pose $U = \mathcal{L}_u$.

a. Exprimer $U(z)$ sous forme de fraction rationnelle en z.

b. En déduire la solution u de (1) sur $\mathbb{R}$.

2. On considère le problème de Cauchy :

$$(2) \quad \begin{cases} 2u'' + v'' + 2u = 0 \\ u'' + v'' + v = 0 \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^*, \; u'(0) = v(0) = v'(0) = 0 \end{cases}$$

On pose $U = \mathcal{L}_u$ et $V = \mathcal{L}_v$.

a. Exprimer $U(z)$ et $V(z)$ sous forme de fractions rationnelles en z.

b. En déduire la solution (u, v) de (2) sur $\mathbb{R}$.