Problème de révision sur les équations différentielles

Définitions et notations

Pour tout entier $m > 0$, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ du produit scalaire usuel :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leq i \leq m} x_i y_i$$

la norme associée est notée $\|x\|$; on note $\mathcal{B}_f(x_0, R)$ la boule fermée de centre $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et de rayon R.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^m$. On dit que l'application $u : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution de l'équation différentielle :

$$x' = f(t, x) \tag{(E)}$$

si :

a) I est un intervalle non trivial (ni vide, ni réduit à un point) de la droite réelle $\mathbb{R}$,

b) u est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}^m$,

c) pour tout $t \in I$, on a $(t, u(t)) \in U$ et $u'(t) = f(t, u(t))$.

Soient $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^m$ et $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^m$ deux solutions de (E) ; on dit que u_1 est une restriction de u_2 si $I_1 \subset I_2$ et si, pour tout $t \in I_1$, on a $u_1(t) = u_2(t)$. On dit aussi que u_2 est un prolongement de u_1; ou encore que u_2 prolonge u_1.

Une solution de (E) est dite maximale si elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle même.

De manière générale $\mathcal{C}^n(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications de X dans Y de classe $\mathcal{C}^n$, lorsque cela a un sens.

On dit que l'application f est localement lipschitzienne en x si, pour tout point (t_0, x_0) de U, il existe deux nombres réels ε et k tous deux > 0 et tels que :

a) l'ensemble $C = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \mathcal{B}_f(x_0, \varepsilon)$ soit inclus dans U,

b) si (t, x_1) et (t, x_2) sont deux points de C, on ait

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|.$$

On rappelle qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^n(U, \mathbb{R}^m)$ est localement lipschitzienne en x.

Les deux premières parties n'utilisent pas le théorème de Cauchy-Lipschitz, contrairement aux autres parties. L'énoncé de ce théorème est donné au début de la troisième partie.

Partie I

Soit q un nombre réel ≥ 0 et soit u une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$; pour $t \in \mathbb{R}$, on écrit $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. On suppose que la fonction u satisfait, sur $\mathbb{R}$, aux égalités :

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -u_1 - q u_1^3. \end{cases}$$

L'existence d'une telle application u est admise ici.

1. Démontrer que u est solution d'une équattion différentielle du type (E) en précisant bien quelle est l'application f.
2. Pour $q = 0$, déterminer l'application u et démontrer que l'image de l'arc $t \mapsto u(t)$ est un cercle. Représenter ceci sur un dessin, en n'oubliant pas de mentionner le sens de parcours.
3. Supposons $q > 0$.

   (a) Démontrer qu'il existe un réel p tel que l'image de u soit incluse dans la courbe

$$C_p = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + \frac{q}{2} x_1^4 + x_2^2 = p \right\}.$$

(b) Démontrer que $p \geq 0$. Que dire si $p = 0$?
On suppose désormais $p > 0$.

(c) Représenter sommairement la courbe C_p dans un repère orthonormé du plan. Les tangentes aux points où la courbe C_p coupe les axes du repère doivent apparaître sur le dessin.

(d) Montrer qu'il existe deux fonctions $\rho, \theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $\rho > 0$, telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait :
$$u_1(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) \text{ et } u_2(t) = \rho(t)\sin(\theta(t)).$$

(e) Calculer $\theta'(t)$ en fonction de ρ et θ et en déduire que la trajectoire de u est exactement la courbe C_p.

Partie II : Barrières

Dans cette partie, on considère une partie ouverte U de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

1. Soient a, b et K des nombres réels, avec $a < b$, et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable satisfaisant à $h(a) = 0$ et $h' \leq Kh$. Démontrer que $h \leq 0$ [on pourra par exemple chercher une fonction φ telle que $(h' - Kh)\varphi$ soit la dérivée d'une fonction simple].

2. Lemme de la barrière inférieure. On suppose I est un intervalle réel non trivial et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in I$, le point $(t, \alpha(t))$ appartienne à U et que l'on ait l'inégalité :
$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)).$$
On dit alors que α est une barrière inférieure de l'équation (E) sur l'intervalle I.
Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution de (E) et $t_0 \in I \cap J$. On suppose que $\alpha(t_0) \leq u(t_0)$ et on veut démontrer que $\alpha(t) \leq u(t)$ pour $t \geq t_0$, $t \in I \cap J$. On procède par l'absurde et on suppose que cela est faux.

   (a) Démontrer qu'il existe t^* et t_1 dans $I \cap J$ tels que $t_0 \leq t_1 < t^*$ et que l'on ait :
   $$u(t_1) = \alpha(t_1) \text{ et } u(t) < \alpha(t) \text{ pour } t_1 < t \leq t^*.$$

   (b) Établir l'existence de $t_2 \in \left]t_1, t^*\right]$ et d'un nombre réel $C \geq 0$ tels que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$ on ait :
   $$|f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t))| \leq C|\alpha(t) - u(t)|.$$

   (c) En déduire que l'on a $\alpha' - u' \leq C(\alpha - u)$ sur $[t_1, t_2]$. Trouver alors une contradiction et conclure.

3. Exemple. Prenons dans cette question $U = \mathbb{R}^2$ et $f(t, x) = x^2 + \sin^2(tx)$.

   (a) Vérifier que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application α de $\left]-\infty, \lambda\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\alpha(t) = \dfrac{1}{\lambda - t}$ est une barrière inférieure de (E).

   (b) En déduire que si, $u : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) et s'il existe un nombre réel t_0 tel que $u(t_0) > 0$, alors l'intervalle I est majoré.

4. De façon analogue, énoncer et démontrer le lemme de la barrière supérieure.

5. Unicité.

   (a) Déduire des résultats précédents que si, $u_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ et $u_2 : J_2 \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de (E) et s'il existe un nombre réel $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.

   (b) Nous allons démontrer par un exemple que l'unicité est fausse lorsqu'on ne suppose plus la fonction f localement lipschitzienne en x. Posons $U = \mathbb{R}^2$ et prenons pour f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t, x) = \sqrt{|x|}$.

      i. Prouver que la fonction f est continue. Est-elle localement lipschitzienne ?

ii. Décrire toutes les solutions positives de (E).

iii. Raccorder de telles solutions avec la fonction nulle pour construire deux solutions de (E) qui coïncident en un point mais pas en tout point.

Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs

Dans la suite du problème, on admet le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Soient U une partie ouverte de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^m)$ une fonction localement lipschitzienne en x. Soit (t_0, x_0) un point de U ; alors :

a) l'équation différentielle (E) admet une solution maximale unique $u : I \to \mathbb{R}^m$ satisfaisant à $u(t_0) = x_0$;

b) son ensemble de départ I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;

c) toute solution v de (E) telle que $v(t_0) = x_0$ est une restriction de u.

Dans cette partie, on prend $m = 1$ et on prend pour U le produit $]a, b[\times]c, d[$, où a, b, c, d désignent des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et satisfont à $a < b$ et $c < d$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ une fonction localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

1. Soient p et q des nombres réels tels que $p < q$ et soit $g :]p, q[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est bornée. Démontrer que la fonction g admet une limite finie en q.
2. Théorème de l'entonnoir.
   Soit $I \subset]a, b[$ un intervalle non trivial et soient $\alpha, \beta : I \to]c, d[$ des applications dérivables telles que, pour tout $t \in I$, on ait :
   $$\alpha(t) \leq \beta(t), \ \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \text{ et } f(t, \beta(t)) \leq \beta'(t).$$
   Dans cette situation, on dit que l'ensemble :
   $$\Delta = \{(t, x) \mid t \in I \text{ et } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}$$
   est un entonnoir de (E) sur l'intervalle I. Nous allons établir que les solutions qui entrent dans un entonnoir s'y trouvent piégées.
   Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E) et soit t_0 un point de J tel que $(t_0, u(t_0))$ appartienne à l'ensemble Δ.
   (a) Démontrer que $(t, u(t))$ appartient à Δ pour tout $t \geq t_0$ appartenant à $I \cap J$.
   (b) Démontrer que $I \cap [t_0, +\infty[$ est contenu dans J.
3. Exemple. On prend $U = \mathbb{R}^2$. On pose :
   $$f(t, x) = t - x + g(t, x),$$
   où $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est une fonction qui satisfait à :
   $$\begin{cases} g(t, x) \geq 1 \text{ pour } x < t, \\ g(t, x) \leq 1 \text{ pour } t < x. \end{cases}$$
   (a) Démontrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, les fonctions α et β définies par $\alpha(t) = t - \lambda e^{-t}$ et $\beta(t) = t + \lambda e^{-t}$, définissent un entonnoir sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que toute solution maximale de (E) est définie sur un intervalle non majoré et admet une asymptote en $+\infty$.

   Voici une nouvelle définition. Soit $I \subset]a, b[$ un intervalle non trivial et soient $\alpha, \beta : I \to]c, d[$ des applications dérivables telles que, pour tout $t \in I$, on ait :
   $$\beta(t) \leq \alpha(t), \ \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \text{ et } f(t, \beta(t)) \leq \beta'(t).$$
   L'ensemble :
   $$\Delta = \{(t, x) \mid t \in I \text{ et } \beta(t) \leq x \leq \alpha(t)\}$$
   est appelé un anti-entonnoir de l'équation (E) sur l'intervalle I.

4. Un résultat d'unicité. On se donne un tel anti-entonnoir A, en supposant de plus que l'extrémité droite de l'intervalle I est le point b, que $\alpha(t) - \beta(t) \to 0$ quand $t \to b$ avec $t < b$, et enfin que la fonction f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ positive ou nulle sur A.
Démontrer qu'il existe au plus une solution u de (E) sur I telle que $(t, u(t))$ appartienne à l'ensemble A pour tout $t \in I$.
5. Un résultat d'existence. Dans cette question, A est un anti-entonnoir sur I, comme ci-dessus par des fonctions α et β, et on suppose que l'extrémité droite de l'intervalle I est le point b. Nous allons établir l'existence d'une solution u de (E) sur I telle que $(t, u(t))$ appartienne à l'ensemble A pour tout $t \in I$. Pour cela considérons une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de I ayant pour limite b.
   (a) Pour toute application u de J dans $\mathbb{R}$, on note $-J$ l'intervalle constitué des nombres réels t tels que $-t \in J$ et on définit l'application $\widehat{u} : -J \to \mathbb{R}$ par la formule $\widehat{u}(t) = u(-t)$. Démontrer que u est solution de (E) si, et seulement si, $\widehat{u}$ est solution d'une équation différentielle $\left(\widehat{E}\right)$ $x' = \widehat{f}(t, x)$ où $\widehat{f}$ est une fonction que l'on précisera.
   (b) Vérifier que $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ définissent un entonnoir de l'équation $\left(\widehat{E}\right)$ sur l'intervalle $-I$.
   (c) Déduire de l'étude des entonnoirs l'existence, pour chaque entier $n \geq 1$, de deux solutions u_n, v_n de (E), définies sur $[t_0, t_n]$ telles que :
$$u_n(t_n) = \alpha(t_n) \text{ et } v_n(t_n) = \beta(t_n).$$
   (d) Prouver que la suite $(u_n(t_0))_{n\geq 1}$ est décroissante, que la suite $(v_n(t_0))_{n\geq 1}$ est croissante et que l'on a $v_n(t_0) \leq u_n(t_0)$ pour tout $n \geq 1$.
   (e) En déduire l'existence d'un nombre réels x_0 tel que $v_n(t_0) \leq x_0 \leq u_n(t_0)$ pour tout $n \geq 1$.
   (f) Considérer l'unique solution maximale u de (E) telle que $u(t_0) = x_0$ et prouver l'existence annoncée.

Partie IV : Périodicité

Pour $T \in]0, +\infty[$, on dit qu'une application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est T-périodique si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $h(t+T) = h(t)$.

Dans cette partie, on prend $U = \mathbb{R} \times]c, d[$ et on suppose l'application $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne en x. De plus, on suppose que l'on a :
$$\forall (t, x) \in U,\ f(t, x) = f(t+T, x)$$
où T est un nombre réel > 0 donné.

1. Donner un exemple très simple d'une telle fonction f pour laquelle aucune solution de (E) n'est périodique.
2. Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle (E).
   (a) Vérifier que l'application v définie par $v(t) = u(t+T)$ est aussi solution de (E) sur un intervalle à préciser.
   (b) En déduire que, s'il existe un nombre réel $t_0 \in J$ tel que $t_0 + T \in J$ et $u(t_0 + T) = u(t_0)$, alors u est T-périodique et $J = \mathbb{R}$.

   Définissons une application P (« une période plus tard ») de la façon suivante : pour chaque $z \in]c, d[$, notons $\gamma_z : I_z \to \mathbb{R}$ l'unique solution maximale de (E) telle que $\gamma_z(0) = z$. On pose :
$$D = \{z \in]c, d[\mid T \in I_z\}$$
   et on note P l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par $P(z) = \gamma_z(T)$.
3. Démontrer que, pour $z \in]c, d[$, la solution γ_z est T-périodique si, et seulement si, $z \in D$ et $P(z) = z$.

4. Démontrer que :
   (a) l'ensemble D est un intervalle de $\mathbb{R}$,
   (b) l'application P est strictement croissante,
   (c) l'ensemble $P(D) = \{P(z) \mid z \in D\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$,
   (d) L'application P est continue.
5. Exemple : prenons $f(t,x) = \sin(t) + 2\cos(x)$ et $T = 2\pi$. Posons $u = \gamma_0$ et $v = \gamma_{-\pi}$.
   (a) Établir que les applications u et v sont bien définies sur $[0, 2\pi]$ (on pourra construire un entonnoir à l'aide des fonctions du type $t \mapsto \pm 3t + \lambda$).
   (b) Vérifier que la fonction nulle est une barrière inférieure de (E) sur $[0, 2\pi]$; en déduire que $u(2\pi) \geq 0$. Démontrer par un raisonnement similaire que $v(2\pi) \leq -\pi$.
   (c) Démontrer qu'il existe $z \in [-\pi, 0]$ tel que $P(z) = z$.
   (d) En déduire que (E) admet au moins une solution 2π-périodique.
   (e) Démontrer que (E) admet une infinité de solutions 2π-périodiques.

Partie V : Applications

Soient a_1 et a_2 des nombres réels tels que $0 < a_1 < a_2$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Pour $x = (x_1, x_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. On note B l'ensemble des points (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x_1 = \rho\cos(\theta)$, $x_2 = \rho\sin(\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [a_1, a_2]$.

On fait en outre les hypothèses suivantes :

(H_1) pour x appartenant à la frontière de B dans $\mathbb{R}^2$, $f(x)$ pointe vers l'extérieur de B, ce qui signifie que, pour tout nombre réel θ, le produit scalaire $\langle f(a_i\cos(\theta), a_i\sin(\theta)), (\cos(\theta), \sin(\theta))\rangle$ est positif ou nul pour $i = 1$, négatif ou nul pour $i = 2$;

(H_2) le produit scalaire $\langle f(x_1, x_2), (-x_2, x_1)\rangle$ ne s'annule pas sur B.

Le but de cette partie est d'établir l'existence d'une solution périodique non constante, à valeurs dans B, de l'équation différentielle (E) $x' = f(x)$.

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où la condition suivante est réalisée :
   (H_3) le produit scalaire $\langle f(x_1, x_2), (-x_2, x_1)\rangle$ est > 0 pour tout $x \in B$.
   On suppose désormais que la condition (H_3) est réalisée.
2. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soient $\theta \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ deux applications dérivables. Pour $t \in I$, on pose :
$$u_1(t) = h(\theta(t))\cos(\theta(t)),\ u_2(t) = h(\theta(t))\sin(\theta(t))$$
   et on note u l'application de I dans $\mathbb{R}^2$ définie par $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$.
   Démontrer que u est solution de (E) si, et seulement si, l'on a, pour tout $x \in I$:
$$\begin{cases} h'(\theta(t))\,\theta'(t) = g_1(\theta(t), h(t)) \\ \theta'(t) = g_2(\theta(t), h(\theta(t))) \end{cases}$$
   où g_1 et g_2 sont deux applications de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
3. Prouver qu'il existe des nombres réels b_1 et b_2, avec $0 < b_1 < a_1 < a_2 < b_2$, tels que la fonction g_2 soit > 0 sur $\mathbb{R} \times]b_1, b_2[$.
4. Pour $(\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times]b_1, b_2[$, on pose :
$$G(\theta, \rho) = \frac{g_1(\theta, \rho)}{g_2(\theta, \rho)}.$$
   On considère l'équation différentielle (E') $\rho' = G(\theta, \rho)$. Puisque l'application G est de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique en θ, on peut appliquer la partie **IV** avec $T = 2\pi$. On continue de noter P l'application « une période plus tard ».

(a) Démontrer que $[0, 2\pi] \times [a_1, a_2]$ est un entonnoir de (E').

(b) Démontrer que $P([a_1, a_2])$ est contenu dans $[a_1, a_2]$.

(c) En déduire que l'application P admet au moins un point fixe dans $[a_1, a_2]$, puis que l'équation (E') admet au moins une solution 2π-périodique $h : \mathbb{R} \to [a_1, a_2]$.

Désormais, on prend pour fonction $h : \mathbb{R} \to [a_1, a_2]$ une solution 2π-périodique de (E').

5. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(\theta) = g_2(\theta, h(\theta))$.

   (a) Prouver que la fonction *reste* encadrée par deux nombres réels > 0.

   (b) En déduire que les solutions maximales de l'équation différentielle (E'') $\theta' = \psi(\theta)$ sont toutes des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

6. Conclure.