Énoncé de la première épreuve écrite

Définitions et notations

Dans ce texte, C est identifié à R^2. Pour x dans C on note $\operatorname{Im} x$ sa partie imaginaire.

Pour tout x dans C et tout réel positif r on note $\overline{D}(x,r) = \{y \in \mathsf{C}, |x-y| \leqslant r\}$ le disque fermé de C, de centre x et de rayon r.

Si M est une matrice carrée, $\operatorname{tr}(M)$ désigne sa trace.

Si A, B et C sont des parties d'un ensemble E, on convient d'écrire $C = A \amalg B$ lorsque $C = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

Pour n=1 ou 2, on note $\mathfrak{I}_n$ le groupe des isométries *affines* euclidiennes de R^n. On note $\mathfrak{I}_n^+$ le sous-groupe des isométries affines euclidiennes directes.

Lorsque E est un ensemble, on note $(\mathfrak{S}_E, \circ)$ le groupe des bijections de E sur lui-même. $\mathfrak{I}_n$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_{\mathsf{R}^n}, \circ)$.

> Soit E un ensemble non vide et G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_E$; on convient de dire qu'une partie *non vide* $\mathcal{D}$ de E est *G-dédoublable* s'il existe des parties $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{D}$ telles que
> (i) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \amalg \mathcal{D}_2$;
> (ii) il existe g_1 et g_2 dans G tels que $g_1(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_1$ et $g_2(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_2$.
> Autrement dit, et de façon imagée, $\mathcal{D}$ est G-dédoublable lorsque l'on peut la découper en deux parties, chacune étant superposable à $\mathcal{D}$ sous l'action de G.

Objectifs du problème

Les trois premières parties étudient l'existence éventuelle d'une partie de C (resp. de R) $\mathfrak{I}_2$-dédoublable (resp. $\mathfrak{I}_1$-dédoublable). Ces trois parties sont indépendantes.

La partie **IV** propose l'étude algébrique d'un sous-groupe de $SL_2(\mathsf{Z})$ engendré par deux matrices. Elle prépare aussi la partie **V** où l'on généralise le concept d'ensemble dédoublable en celui d'ensemble paradoxal sous l'action d'un groupe.

La partie **V** est dévolue à l'étude de deux ensembles qui se révèlent paradoxaux sous l'action du groupe étudié dans la partie **IV**.

Partie I : Parties dédoublables de C=R^2

A. Étude d'un premier exemple

On considère le disque fermé $\overline{D} = \{x \in \mathsf{C}, |x| \leqslant 1\}$.

1. On suppose l'existence de parties A et B de $\overline{D}$ telles que

$$\overline{D} = A \amalg B \; ; \quad 0 \in A \; ; \quad \exists \tau \in \mathfrak{I}_2, \; \tau(A) = B.$$

   (a) Montrer que si deux points x et y de $\overline{D}$ vérifient $|x-y| = 2$ alors leur milieu est 0.
   (b) Montrer que pour w dans $\overline{D}$, la condition $|w - \tau(0)| > 1$ entraîne $w \in A$ (on pourra raisonner par contraposition).
   (c) En déduire l'existence d'un diamètre $[u,v]$ de $\overline{D}$ à extrémités u, v dans A.
   (d) Relever une contradiction.

2. En déduire que le disque fermé $\overline{D}$ de C n'est pas $\mathfrak{I}_2$-dédoublable.

B. Cas des parties bornées

Plus généralement on se propose de montrer que

$$\boxed{\text{Aucune partie } \textit{bornée} \text{ de } \mathsf{C} \text{ n'est } \mathfrak{I}_2\text{-dédoublable.}}$$

La preuve qui suit est due à H. HADWIGER et H. DEBRUNNER [1964].

B 1. Disque enveloppant minimal

Soit $\mathcal{B}$ une partie non vide et *bornée* de C. Pour r dans R_+ on pose $\mathcal{C}_r = \big\{x \in \mathsf{C}, \mathcal{B} \subset \overline{D}(x,r)\big\}$ et $R = \{r \in \mathsf{R}_+, \mathcal{C}_r \neq \emptyset\}$.

1. (a) Montrer que l'ensemble R admet une borne inférieure ; on note ρ cette borne inférieure.
   (b) Établir l'énoncé suivant :
   $$\forall n \in \mathsf{N}^*,\ \exists x_n \in \mathsf{C},\ \mathcal{B} \subset \overline{D}\left(x_n, \rho + \frac{1}{n}\right)\cdot$$
2. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ admet une sous-suite convergente.
   (b) En déduire l'existence d'un nombre complexe a tel que $\mathcal{B} \subset \overline{D}(a,\rho)$.
   (c) Démontrer l'unicité d'un tel a.

Autrement dit la partie $\mathcal{B}$ est contenue dans un *unique* disque fermé de rayon *minimum*.

B 2. Conclusion

1. Dresser sans démonstration la liste des différents *types* de transformations géométriques qui constituent le groupe $\mathfrak{I}_2$.
2. On suppose l'existence d'une partie *bornée* et non vide, $\mathcal{B}$, de C, qui est $\mathfrak{I}_2$-dédoublable. On adopte alors les notations suivantes :
   $$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2, \text{ avec } \tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ dans } \mathfrak{I}_2 \text{ vérifiant } \mathcal{B}_i = \tau_i(\mathcal{B}) \text{ pour } i = 1,2.$$
   On remarquera que, pour $i = 1, 2$, $\tau_i(\mathcal{B})$ est *strictement* contenu dans $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que les isométries τ_i ne peuvent être que des rotations différentes de l'identité. On note ω_i le centre de τ_i pour $i = 1, 2$.
   (b) En considérant l'unique disque $D(a,\rho)$ de rayon minimum contenant $\mathcal{B}$ [voir la section **B1**], montrer que $\omega_1 = a = \omega_2$.
   (c) Montrer que $\tau_1(\tau_2(\mathcal{B})) \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, relever une contradiction, puis conclure.

Partie II : Le paradoxe de Sierpinski-Mazurkiewicz [1914]

$\boxed{\text{On se propose de décrire une partie } \textit{non bornée} \text{ de } \mathbb{C} \text{ et } \mathfrak{I}_2\text{-dédoublable.}}$

Un nombre complexe ξ est dit *transcendant* si le seul polynôme à coefficients rationnels dont il est racine est le polynôme nul. On utilisera librement l'existence d'un nombre transcendant u de module égal à 1.

On note $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$, et l'on pose

$$\mathcal{D} = \{P(u), P \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}\}.$$

Soient t et r les transformations du plan complexe définies pour x dans $\mathbb{C}$ par $t(x) = x + 1$ et $r(x) = ux$ respectivement.

1. En exploitant le caractère transcendant de u, établir que $t(\mathcal{D}) \cap r(\mathcal{D}) = \emptyset$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ est $\mathfrak{I}_2$-dédoublable (on pourra commencer par montrer que tout polynôme P de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ peut être écrit sous l'une des deux formes suivantes : $P = R + 1$ ou $P = XS$ avec R et S dans $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$).

Partie III : Parties dédoublables de $\mathbb{R}$

On se propose d'établir le résultat suivant [W. Sierpinski] :

$\boxed{\text{Aucune partie de } \mathbb{R} \text{ n'est } \mathfrak{I}_1\text{-dédoublable.}}$

Les sections **A**, **B** et **C** sont dévolues à la preuve de ce résultat.

A. La croissance d'un groupe

Soit G un groupe de loi interne notée multiplicativement et d'élément neutre noté 1. Soit S une partie finie de $G \setminus \{1\}$, supposée symétrique au sens suivant : $\forall x \in S, x^{-1} \in S$.
Le sous-groupe de G engendré par S est alors l'ensemble des produits finis d'éléments de S (on convient que le produit vide vaut 1) ; on le note $< S >$.
La longueur relativement à S, $\ell_S(x)$, d'un élément x de $< S >$ est définie de la manière suivante : $\ell_S(1) = 0$, et, pour $x \neq 1$, $\ell_S(x)$ est le plus petit entier p tel que l'on puisse écrire $x = s_1 s_2 \cdots s_p$, avec s_k dans S pour $1 \leqslant k \leqslant p$.
Pour n entier strictement positif on pose $B_S(n) = \{x \in < S >,\ \ell_S(x) \leqslant n\}$, $\gamma_S(n) = \operatorname{Card} B_S(n)$ [le cardinal de $B_S(n)$] et $c_S(n) = (\gamma_S(n))^{\frac{1}{n}}$.

1. Établir l'inégalité :
$$\forall p, q \geqslant 1, \quad \gamma_S(p+q) \leqslant \gamma_S(p)\gamma_S(q).$$
2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln \gamma_S(n)$ et $v_n = \dfrac{u_n}{n}\cdot$
   (a) Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$; en effectuant la division euclidienne de n par p, établir la majoration
   $$v_n \leqslant v_p + \frac{p}{n} v_1.$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $v = \inf\limits_{n\geqslant 1} v_n$.
3. Démontrer la convergence de la suite $(c_S(n))_{n\geqslant 1}$ vers une limite C_S, et vérifier l'inégalité $C_S \geqslant 1$.

Le groupe G est dit à *croissance sous-exponentielle* lorsque, pour chaque S, partie finie symétrique de $G \setminus \{1\}$, on a $C_S = 1$.
Il est dit à *croissance exponentielle* dans le cas contraire.

4. Que dire de la croissance de G s'il contient un sous-groupe à croissance exponentielle ?
5. Montrer qu'un groupe *abélien* est toujours à croissance sous-exponentielle.

B. La croissance du groupe $\mathfrak{I}_1$

On considère une partie S de $\mathfrak{I}_1 \setminus \{Id\}$, finie et symétrique.

1. Montrer que $\mathfrak{I}_1$ est formé des transformations $x \mapsto ux + v$, avec $u = \pm 1$ et $v \in \mathsf{R}$.
2. Soient $\varepsilon = \pm Id$ et s dans S ; prouver l'existence et l'unicité de t dans $\mathfrak{I}_1^+$ et de $\varepsilon' = \pm Id$ tels que $\varepsilon \circ s = t \circ \varepsilon'$.

On note T_0 la partie *finie* de $\mathfrak{I}_1^+$ obtenue en collectant les divers éléments t lorsque le couple (ε, s) décrit l'ensemble $\{\pm Id\} \times S$. On pose alors

$$T = \left\{\tau \in \mathfrak{I}_1^+, \tau \in T_0 \text{ ou } \tau^{-1} \in T_0\right\}$$

puis on considère les parties $B_S(n)$ de $\mathfrak{I}_1$ et $B_T(n)$ de $\mathfrak{I}_1^+$, pour n quelconque dans N^*.

3. Démontrer que
$$\forall \tau \in B_S(n), \quad \exists (\sigma, \varepsilon) \in B_T(n) \times \{\pm Id\}, \quad \tau = \sigma \circ \varepsilon.$$
4. En déduire que $\boxed{\text{le groupe } \mathfrak{I}_1 \text{ est à croissance sous-exponentielle.}}$

C. Conclusion

On suppose ici l'existence d'une partie $\mathcal{D}$ de R, non vide et $\mathfrak{I}_1$-dédoublable.
On adopte alors les notations :
$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \amalg \mathcal{D}_2$, avec τ_1, τ_2 dans $\mathfrak{I}_1$ tels que $\tau_i(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_i$ $(i = 1, 2)$.
Pour n dans N^* et $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dans $\{\tau_1, \tau_2\}^n$ on pose $\gamma_s = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_n$.

1. Montrer que, pour tout couple (s, s') de $\{\tau_1, \tau_2\}^n$ tel que $s \neq s'$, on a $\gamma_s(\mathcal{D}) \cap \gamma_{s'}(\mathcal{D}) = \emptyset$.
2. On pose $S = \left\{\tau_1, \tau_1^{-1}, \tau_2, \tau_2^{-1}\right\}$. Déduire de la question précédente une minoration de la constante C_S pour le groupe $\mathfrak{I}_1$.
3. Relever une contradiction, et en déduire qu'aucune partie de R n'est $\mathfrak{I}_1$-dédoublable.

D. La croissance du groupe $\mathfrak{I}_2$

La croissance du groupe $\mathfrak{I}_2$ est-elle exponentielle ou bien sous-exponentielle ? (On pourra s'inspirer de la section**III.C**).

Partie IV : Un groupe « paradoxal »

Dans cette partie on se propose d'étudier un groupe Γ dont les propriétés seront exploitées dans la partie **V**.

Soit $SL_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients entiers et de déterminant égal à 1 ; son élément neutre est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note E l'espace des matrices colonnes réelles $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$.

On s'intéresse au sous-groupe Γ de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

A. Calculs préliminaires

1. Calculer A^k et B^k pour k dans $\mathbb{Z}$.
2. On pose :

$$\Gamma_1 = \left\{A^k, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{B^k, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad E_1 = \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in E, |x| > |y|\right\}, \quad E_2 = \left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in E, |x| < |y|\right\}$$

Démontrer les énoncés suivants :

$$(1) \qquad \forall M \in \Gamma_1 \setminus \{I\}, \quad \forall X_2 \in E_2, \quad MX_2 \in E_1$$

$$(2) \qquad \forall P \in \Gamma_2 \setminus \{I\}, \quad \forall X_1 \in E_1, \quad PX_1 \in E_2$$

B. Les éléments de Γ

Dans la suite, on convient des notations suivantes :

- ▷ Les M_i sont dans $\Gamma_1 \setminus \{I\}$, et les P_i sont dans $\Gamma_2 \setminus \{I\}$.
- ▷ Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note Π_n le produit $(M_1P_1)(M_2P_2)\cdots(M_nP_n)$.

1. Justifier qu'un élément de Γ est de l'un des types suivants :

(0)	$U_0 = I$	**(1)**	$U_1 = P_0$	**(2)**	$U_2 = M_0$	**(3)**	$U_3 = P_0M_0$
(4)	$U_4 = \Pi_n, n \geqslant 1$	**(5)**	$U_5 = P_0\Pi_r, r \geqslant 1$	**(6)**	$U_6 = \Pi_s M_{s+1}, s \geqslant 1$	**(7)**	$U_7 = P_0\Pi_t M_{t+1}, t \geqslant 1$

2. On rappelle que les matrices M_i et P_j sont *toutes* différentes de I.
   (a) Montrer que $U_3 \neq I$.
   (b) En considérant U_6X_2 avec X_2 dans E_2, montrer que $U_6 \neq I$.
   (c) Montrer que $U_5 \neq I$ (on pourra considérer une matrice semblable à U_5 afin de se ramener au **b.**). Démontrer de même que $U_4 \neq I$.
   (d) En déduire que $U_7 \neq I$.

3. On considère le produit
$$\Pi'_n = \left(M'_1P'_1\right)\left(M'_2P'_2\right)\cdots\left(M'_nP'_n\right)$$
où $n \geqslant 1$, les M'_i sont dans $\Gamma_1 \setminus \{I\}$, et les P'_i sont dans $\Gamma_2 \setminus \{I\}$.
   (a) Établir que l'égalité $\Pi_n = \Pi'_n$ impose $M_i = M'_i$ et $P_i = P'_i$ pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant n$ (on pourra considérer la matrice $\Pi'_n\Pi_n^{-1}$).
   (b) En considérant $S = \left\{A, A^{-1}, B, B^{-1}\right\}$, en déduire que le groupe Γ est à croissance exponentielle. Quelle est la croissance du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$?

C. Éléments d'ordre fini de Γ

On se propose de montrer que I est le seul élément d'ordre *fini* de Γ.

Soit $(U,k) \in \Gamma \times \mathsf{N}^*$ tel que $U^k = I$.

1. Montrer que U ne peut pas être du type U_4, U_7 ou U_3.
2. On suppose que U est du type U_6.
   (a) En considérant les éléments $V_1 = M_{s+1}U_6M_{s+1}^{-1}$, $V_2 = P_1^{-1}V_1P_1$, montrer que l'on a, successivement, $M_{s+1}M_1 = I$, puis $P_sP_1 = I$.
   (b) Relever alors une contradiction.
3. En déduire que U ne peut pas être de type U_5.
4. Conclure que $U = I$.

D. Conclusion

Grâce aux résultats du **B.2.** et par des calculs analogues à ceux du **B.3.** on pourrait montrer que :

(1) Pour chacun des types rencontrés au **B.1.**, l'écriture est *unique*.
(2) Un élément de Γ ne peut être que d'*un seul type*.
Dans la suite, le candidat pourra utiliser librement ces résultats.

▷ Lorsque $\mathcal{M} \subset \Gamma$ et $V \in \Gamma$, on pose $V\mathcal{M} = \{VU, U \in \mathcal{M}\}$.

Démontrer l'existence de quatre parties $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ de Γ, non vides et deux à deux disjointes, telles que

$$\Gamma = \mathcal{Q}_1 \cup A\mathcal{Q}_2 \quad \text{et} \quad \Gamma = \mathcal{R}_1 \cup B\mathcal{R}_2.$$

Partie V : Ensembles G-paradoxaux

Rappels

- ▷ Une opération ou action d'un groupe $(G, \cdot)$, de neutre noté 1, sur un ensemble non vide E est la donnée d'une application $\star : G \times E \to E$ telle que :
  (*i*) $\forall (g', g, x) \in G \times G \times E, \quad g' \star (g \star x) = (g'g) \star x$;
  (*ii*) $\forall x \in E, 1 \star x = x$.
- ▷ les G-orbites de E sont alors les ensembles $\mathcal{O}_x = \{g \star x, g \in G\}$ pour x dans E, elles constituent une partition de E.

Si le groupe G opère sur E on le fait aussi opérer de manière naturelle sur l'ensemble des parties de E en posant

$$\forall g \in G, \quad \forall X \subset E, \quad g \star X = \{g \star x, x \in X\}.$$

Définition

Avec les notations précédentes, on convient de dire qu'une partie $\mathcal{P}$ de E est G-*paradoxale* lorsqu'elle contient des parties $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ non vides et disjointes pour lesquelles il existe :

1. Des entiers $m, n \geqslant 1$;
2. des partitions de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$, $(\mathcal{Q}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $(\mathcal{R}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$;
3. des suites finies d'éléments de G,$(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $(h_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ vérifiant
   $\mathcal{P} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i \star \mathcal{Q}_i$ et $\mathcal{P} = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} h_j \star \mathcal{R}_j$.

Autrement dit, et de façon imagée, $\mathcal{P}$ est G-paradoxale lorsqu'elle contient des parties non vides et disjointes $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$, chacune pouvant être découpée en un nombre fini de morceaux puis réarrangée sous l'action de G de manière à reconstituer $\mathcal{P}$.

A. Exemples

1. Définir une opération du groupe Γ de la partie **IV.** sur l'ensemble Γ de sorte que Γ soit un ensemble Γ-paradoxal.
2. Soit E un ensemble non vide, et G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_E$; montrer que toute partie G-dédoublable de E est G-paradoxale pour une action de G qui est à préciser.

   Commentaire : En adaptant de façon mineure l'argumentation proposée au **III.** on pourrait montrer le résultat suivant [W. SIERPINSKI 1954] :

   $$\boxed{\text{R ne contient aucune partie } \mathfrak{I}_1\text{-paradoxale.}}$$
3. On suppose que le groupe Γ opère sur un ensemble non vide E, et que l'hypothèse suivante est vérifiée :

   $$\forall U \in \Gamma \setminus \{I\}, \quad \forall x \in E, \quad U \star x \neq x.$$

   Montrer que l'ensemble E est Γ-paradoxal.

   Indication : On pourra considérer une partie T de E telle que l'intersection de T avec chacune des G-orbites est un singleton, et l'on ne soulèvera pas de difficulté relative à l'existence d'une telle partie.

B. Le plan hyperbolique est Γ-paradoxal

On note $H^2 = \{x \in \mathsf{C}, \mathrm{Im}(x) > 0\}$ (le demi-plan de POINCARÉ).

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathsf{Z})$; montrer que l'on définit une bijection h_M de H^2 sur lui-même en posant :

   $$\forall x \in H^2, \quad h_M(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Dans la suite on pourra utiliser sans justification le fait que l'application $M \mapsto h_M$ définit un morphisme du groupe $(SL_2(\mathsf{Z}), \cdot)$ vers le groupe symétrique $(\mathfrak{S}_{H^2}, \circ)$.

2. (a) Montrer que le noyau du morphisme cité ci-dessus est $\{\pm I\}$.
   (b) Montrer que ce morphisme induit un isomorphisme du sous-groupe Γ sur son image, que l'on notera $\overline{\Gamma}$.
3. Soit M dans $SL_2(\mathsf{Z})$ tel que l'homographie h_M fixe au moins un point de H^2.
   (a) Établir l'alternative : $(|\operatorname{tr}(M)| < 2 \quad \text{ou bien} \quad h_M = Id)$.
   (b) Prouver que h_M est d'ordre fini dans le groupe $(\mathfrak{S}_{H^2}, \circ)$.
4. Démontrer qu'aucun élément de $\overline{\Gamma} \setminus \{Id\}$ n'a de point fixe dans H^2.
5. Prouver que le demi-plan de POINCARÉ est Γ-paradoxal pour une opération de Γ que l'on précisera.

C. Une partie de R^2 bornée et Γ-paradoxale

▷ On note Δ la partie $[0,1[^2$ de R^2. On rappelle que l'on définit une relation d'équivalence, notée $\sim$, en posant :

$$\forall p, q \in \mathsf{R}^2, \quad p \sim q \Longleftrightarrow p - q \in \mathsf{Z}^2.$$

De plus Δ rencontre chaque classe d'équivalence selon un singleton.
Lorsque $p \in \mathsf{R}^2$, on note $\widehat{p}$ l'unique q de Δ tel que $p \sim q$.

▷ Pour $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans Γ et $p = (x, y)$ dans R^2, on pose

$$U \star p = (ax + by, cx + dy).$$

On admettra sans justification que l'on définit ainsi une opération du groupe Γ sur l'ensemble R^2, et que , si l'on note γ_U la bijection $p \mapsto U \star p$ de R^2 dans R^2, l'ensemble $\Gamma_g = \{\gamma_U, U \in \Gamma\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\mathsf{R}^2}$, version *géométrique* du groupe Γ.

1. Établir que :

$$\forall \gamma \in \Gamma_g, \quad \forall p, q \in \mathsf{R}^2, \quad p \sim q \Longrightarrow \gamma(p) \sim \gamma(q).$$

2. Lorsque $\gamma \in \Gamma_g$, on définit une application $\widehat{\gamma}$ de Δ dans Δ en posant, pour tout p de Δ, $\widehat{\gamma}(p) = \widehat{\gamma(p)}$.
Montrer que l'application $\gamma \mapsto \widehat{\gamma}$ est un morphisme injectif du groupe $(\Gamma_g, \circ)$ dans le groupe $(\mathfrak{S}_\Delta, \circ)$ des bijections de Δ. On note $\widehat{\Gamma_g}$ son image.

3. Démontrer que $\widehat{\Gamma_g}$ est un ensemble dénombrable.

4. On s'intéresse à l'ensemble $F = \left\{ p \in \Delta, \exists \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma_g} \setminus \{Id\}, \widehat{\gamma}(p) = p \right\}$.
On note C_0 un cercle donné contenu dans Δ, et de rayon strictement positif. On rappelle que R n'est pas dénombrable.
   (a) Montrer que si $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathsf{N}}$ est une suite de droites affines de R^2, on a $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathsf{N}} (C_0 \cap \mathcal{D}_n) \neq C_0$.
   (b) En discutant l'équation $\widehat{\gamma}(p) = p$ selon la nature de γ (élément de $\Gamma_g \setminus \{Id\}$), montrer que

   $$C_0 \cap F \neq C_0.$$

5. En déduire que F est une partie d'intérieur vide dans R^2.

6. Montrer que l'on peut faire opérer le groupe Γ sur la partie *bornée* non vide $\mathcal{P} = \Delta \setminus F$ de telle sorte que :

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ soit un ensemble } \Gamma\text{-paradoxal.}}$$