2 Problème

EITPE 1981

$n \geqslant 1$ est un entier fixé. On note $(x_1, x_2, ..., x_n)$ les coordonnées dans la base canonique de $x \in \mathbb{R}^n$.
$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ désigne une matrice symétrique.
On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de classe C^k de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
$D : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ désigne l'application définie par :

$$D(f) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

D est une application linéaire dont on notera $\mathcal{N}$ le noyau.
Le but de ce problème est d'étudier les applications $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 qui conservent $\mathcal{N}$, c'est-à-dire qui vérifient : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), f \in \mathcal{N} \implies f \circ u \in \mathcal{N}$.
Étant donnée $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, on note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $J_x(u) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice

$$J_x(u) = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right]_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$$

Étant donnée $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, on note, pour tout $x \in \mathbb{R}, H_x(g) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice

$$H_x(g) = \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$$

2.1 Première partie

u désigne une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 qui conserve $\mathcal{N}$. On pose $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ (donc $u_k \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$).

1. Montrer que chaque u_k est dans $\mathcal{N}$ (on pourra considérer $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x_k$).
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.
   (a) Exprimer $\dfrac{\partial (f \circ u)}{\partial x_i}(x)$ en fonction des $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$, de u et x.

   (b) En appliquant deux fois cette relation, montrer que, pour tous i, j vérifiant $1 \leqslant i, j \leqslant n$:
   $$\frac{\partial^2 (f \circ u)}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(u(x))\right] + \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))\right]$$
   (c) Interpréter ces égalités comme une identité matricielle qui exprime $H_x(f \circ u)$ en fonction de ${}^tJ_x(u)$, $H_{u(x)}(f)$, $J_x(u)$ et des $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(u(x))$ et $H_x(u_k)$.
3. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.
   (a) Montrer que que $(A, B) \mapsto Tr(AB)$ est un produit scalaire sur $S_n(\mathbb{R})$).
   (b) Soient A_1 et A_2 dans $S_n(\mathbb{R})$. Montrer que si, pour tout $S \in S_n(\mathbb{R}),\ Tr(A_1 S) = 0 \implies Tr(A_2 S) = 0$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A_2 = \lambda A_1$.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.
   (a) Montrer que $D(f)(x) = Tr(AH_x(f))$.
   (b) Montrer que $D(f \circ u)(x) = Tr(A^t J_x(u) H_{u(x)}(f) J_x(u))$.
5. Soit $S = (S_{i,j}) \in S_n(\mathbb{R})$, et $Q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ définie par : $Q(x) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} S_{i,j} x_i x_j$. Calculer $H_x(Q)$.
6. Déduire de ce qui précède l'existence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'un réel $\lambda(x)$ vérifiant : $J_x(u) A^t J_x(u) = \lambda(x) A$. Montrer alors : $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n),\ D(f \circ u)(x) = \lambda(x) D(f)(u(x))$.
7. Résoudre complètement le problème lorsque $n = 2$ et $D(f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$.

2.2 Seconde partie

On suppose dans cette partie que la matrice A est inversible et l'on pose $B = A^{-1}$ ($B = (b_{i,j})$). $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ désigne maintenant une application de classe C^2 telle que :

i. $\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant n, D(u_k) = 0$
ii. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists \lambda(x);\ J_x(u) A^t J_x(u) = \lambda(x) A$
iii. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \det(J_x(u)) \neq 0$

1. Montrer, pour chaque x, l'unicité de $\lambda(x)$. Prouver que l'application λ ainsi définie ne s'annule pas et est de classe C^1. Établir ensuite : ${}^tJ_x(u) B J_x(u) = \lambda(x) B$.

2. Montrer que pour tous i, j, k dans $[1, n]$,

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1^n} b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}b_{k,i} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}b_{i,j} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}b_{j,k}\right]$$

Indication : Poser $T_{i,j,k} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}$ *et évaluer la dérivée partielle par rapport à* x_k *de* $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1^n} b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\frac{\partial u_q}{\partial x_j}$

3. Prouver que : $\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ (n-2)\dfrac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 0$.

   Indication : Calculer $\displaystyle\sum_{i,j}\sum_{p,q} A_{i,j}b_{p,q}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}$.

4. On suppose $n \neq 2$.

   (a) Montrer que λ est constante et déduire de **2.** que, pour tous i,j,q, $\dfrac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = 0$.

   (b) Prouver alors que u est affine.

5. Donner un exemple lorsque $n = 2$ attestant que la conclusion de **4.** n'est pas valide dans ce cas.