Agrégation interne de Mathématiques
session 2003
première composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [agregint03comp1e]

DODÉCAÈDRE

Si z est un nombre complexe, son conjugué est noté $\overline{z}$. $Re(z)$ désigne sa partie réelle.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ d'un espace vectoriel euclidien E est noté $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et la norme associée est notée $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$.
$SO(E)$ désigne le groupe des isométries directes (i.e. de déterminant égal à $+1$) de l'espace euclidien E, et 1_E l'application identique de E dans lui-même.
La distance entre deux points M et N d'un espace affine euclidien est notée $\|\overrightarrow{MN}\|$.
Si n est élémentde $\mathbf{N}^*$, $[1..n]$ désigne l'ensemble des entiers naturels de 1 à n.

Préambule. Rappels sur les isométries directes en dimension trois

E désigne ici un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois et $GL(E)$ désigne le groupe des automorphismes de E.
Soit f un élément de $GL(E)$, soit $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée directe et soit M la matrice représentant f dans la base $\mathcal{B}$. On rappelle que f est élément de $SO(E)$ si et seulement si la matrice M est orthogonale directe. Dans ce cas, et sous réserve que f ne soit pas égal à 1_E, f est une rotation ; elle est alors caractérisée par un axe, déterminé et orienté par un vecteur $\mathbf{u}$ non nul, et un angle θ, orienté autour de cet axe, déterminé par sa mesure , encore notée θ, qui est un réel défini à 2π près. On note alors : $f = Rot(\mathbf{u}, \theta)$.

1. On pose $M = [m_{i,j}]$ pour $(i, j) \in [1..3]^2$.
   Rappeler des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients de M pour qu'elle soit orthogonale directe.

Dans les trois questions qui suivent, on suppose que f n'est pas égale à 1_E et que les conditions précédentes sont réalisées.

2. Indiquer comment trouver un vecteur $\mathbf{u}$.
3. Montrer que la trace de la matrice M vérifie :

$$tr\ (M) = 1 + 2\cos\theta$$

   À quelle condition f est-elle un demi-tour ?
4. On suppose que f n'est pas un demi-tour ; soit $\mathbf{v}$ un vecteur quelconque non colinéaire à $\mathbf{u}$. Montrer que le produit mixte $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), \mathbf{u})$ est non nul et que son signe est celui de $\sin\theta$.

Partie I . Étude du pentagone régulier

E désigne, dans cette partie seulement, un espace vectoriel euclidien de dimension deux.
On pose :

$$\omega = e^{2i\pi/5}$$

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien associé à E et soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un élément de $\mathcal{P}^5$. On dit que les cinq points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 *pris dans cet ordre* forment un *pentagone régulier* si et seulement si il existe un point O de $\mathcal{P}$, un réel strictement positif r, et un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de $\mathcal{P}$ tels que les cinq points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 aient respectivement pour affixes les complexes :

$$r\omega^k\ ,\ k = 0, 1, 2, 3, 4$$

O, r et le repère $(O,\mathrm{i},\mathrm{j})$ sont alors déterminés de manière unique. On appellera dans la suite pentagone régulier noté plus brièvement $A_0A_1A_2A_3A_4$ tout à la fois l'ensemble ordonné des cinq points ainsi obtenus et appelés *sommets* du pentagone régulier dans $\mathcal{P}$ et l'ensemble ordonné des vecteurs $\overrightarrow{OA_0}, \cdots, \overrightarrow{OA_4}$ de E.
On dit alors que, pour k variant de 0 à 3, A_k et A_{k+1} sont des sommets *consécutifs*, ainsi que A_4 et A_0. O est le *centre* du pentagone régulier.

1. On suppose ici $r = 1$ et on pose : $a' = \cos(\frac{2\pi}{5}) = Re(\omega)$.

   (a) Montrer que ω vérifie la relation :
   $$1 + (\omega + \overline{\omega}) + (\omega^2 + \overline{\omega}^2) = 0$$
   En déduire que : $a' = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

   (b) On pose $a = 2a'$ et $b = \dfrac{1}{a}$. Montrer que a est solution d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$; montrer qu'il en est de même pour b.

   (c) Calculer $a, b, ab, a+b, b-a$ et a^2+b^2.
   (On mettra les résultats sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y rationnels.)

   (d) Calculer en fonction de b le rapport :
   $$p = \frac{\|\overrightarrow{A_0A_2}\|}{\|\overrightarrow{A_0A_1}\|}$$

   (e) Montrer que :
   $$\|\overrightarrow{A_0A_1}\| = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

2. Soit$(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ un élément de $\mathcal{P}^5$ tel que les points M_k, pour k variant de 0 à 4, soient deux à deux distincts ; il résulte de ce qui précède que les conditions (a) et (b) suivantes sont nécessaires pour que $M_0M_1M_2M_3M_4$ soit un pentagone régulier :

   (a) Il existe un point O de $\mathcal{P}$ et un réel strictement positif r tels que les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 appartiennent au cercle de centre O et de rayon r.

   (b) Les distances $\|\overrightarrow{M_0M_1}\|, \|\overrightarrow{M_1M_2}\|, \|\overrightarrow{M_2M_3}\|, \|\overrightarrow{M_3M_4}\|, \|\overrightarrow{M_4M_0}\|$ sont toutes égales.

   Montrer qu'elles ne sont pas suffisantes (si $(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4)$ définit un pentagone régulier, on pourra considérer $(M_0, M_2, M_4, M_1, M_3)$) ; montrer que c'est toutefois bien le cas si on précise dans la condition (b) que ces distances sont égales à :
   $$\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$
   (on pourra étudier à l'aide de coordonnées polaires la fonction $M \mapsto \|\overrightarrow{M_0M}\|$ définie sur un demi-cercle dont M_0 est l'une des extrêmités).

3. On désigne par Γ l'ensemble des déplacements de $\mathcal{P}$ conservant l'ensemble des cinq sommets d'un pentagone régulier.

   (a) Montrer que les éléments de Γ autres que l'identité sont des rotations de centre 0 et que Γ est un sous-groupe du groupe $Isom^+(\mathcal{P})$ des déplacements de $\mathcal{P}$.

   (b) Montrer que Γ est isomorphe à un sous-groupe de $SO(E)$. Déterminer le cardinal de Γ.

   (c) Montrer que Γ est cyclique. Par lesquels de ses éléments est-il engendré ?

Tournez la page S.V.P.

Partie II. Mise en place du dodécaèdre

Pour toute la suite du problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois et $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien associé à E, rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
On ne manquera pas, pour tout ce qui suit, de se rapporter, pour plus de commodité, au dessin fourni à la fin de l'énoncé.
On définit les huit sommets $ABCDA'B'C'D'$ d'un cube noté C_0 comme suit par leurs coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$:

$$A = (1,1,1), B = (-1,1,1), C = (-1,-1,1), D = (1,-1,1)$$

A', B', C', D' désignent leurs symétriques respectifs par rapport à O.

1. (a) Montrer l'existence d'un point unique $J = (a, 0, b')$ avec $b' > 1$ tel que

$$\|\overrightarrow{JA}\| = \|\overrightarrow{JD}\| = 2a$$

   et exprimer b' en fonction de b.

   (b) I désigne le transformé de J dans le demi-tour d'axe $(O, \mathbf{k})$. I' et J' sont les transformés respectifs de I et J dans la symétrie par rapport à O. Déterminer les points I, I', J' par leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$.

2. On définit de même K, L, M, N ainsi que leurs symétriques respectifs K', L', M', N' par rapport à O par les conditions suivantes :

   (a) $\overrightarrow{KL} = 2a\mathbf{j}$, $\|\overrightarrow{KB'}\| = \|\overrightarrow{KD}\| = 2a$, K et L se correspondent dans le demi-tour d'axe $(0, \mathbf{i})$ et la première coordonnée de K est supérieure à 1.

   (b) $\overrightarrow{MN} = 2a\mathbf{k}$, $\|\overrightarrow{NA}\| = \|\overrightarrow{NB}\| = 2a$, M et N se correspondent dans le demi-tour d'axe $(0, \mathbf{j})$ et la seconde coordonnée de N est supérieure à 1.

   Préciser en fonction de a et b les coordonnées de ces huit nouveaux points.

3. L'ensemble des vingt points $A, B, C, D, I, J, K, L, M, N, A', B', C', D', I', J', K', L', M', N'$ ainsi définis déterminent un *dodécaèdre* qui sera considéré à la fois comme ensemble de vingt points de $\mathcal{E}$ appelés *sommets* ou comme ensemble de vingt vecteurs de E : $\overrightarrow{OA}, \ldots, \overrightarrow{ON'}$.
   On dira que deux sommets sont *opposés* si et seulement si ils se correspondent dans la symétrie par rapport à O ; ainsi, les paires $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \cdots, \{N, N'\}$ sont formées de sommets deux à deux opposés.
   On dit que le cube $C_0 = ABCDA'B'C'D'$ est *inscrit* dans le dodécaèdre.
   On appelle *face* du dodécaèdre l'un des douze sous-ensembles ordonnés de sommets suivants :

$$AJDKL, LKB'I'C', ALC'MN, NMD'K'B, ANBIJ, MC'I'J'D'$$

   ainsi que les six autres obtenus par symétrie par rapport à O.

   Montrer que les points $AJDKL$ appartiennent à un même plan et donner une équation de ce plan.
   (On pourra commencer par établir qu'une telle équation est de la forme $\alpha x + \beta z = \gamma$ puis déterminer les coefficients en fonction de a et b.) Donner de même une équation de la face $ANBIJ$.

4. (a) Déterminer les coordonnées de O_1, isobarycentre de la face $AJDKL$ et de O_2, isobarycentre de la face $ANBIJ$.
   (N.B. On laissera ces coordonnées sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y rationnels).

(b) Vérifier que $\overrightarrow{OO_1}$ définit un vecteur normal à la face $AJDKL$.

(c) Montrer que la face $AJDKL$ du dodécaèdre est un pentagone régulier (on pourra utiliser la question $I.2$). Il en est de même pour les autres faces, ce que l'on admettra.

(d) Déterminer par son cosinus l'angle (non orienté) des vecteurs $\overrightarrow{OO_1}$ et $\overrightarrow{OO_2}$.

Partie III. Matrice de Gram et isométries

1. On appelle *simplexe* un triplet de vecteurs ($\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$), déterminé par trois sommets consécutifs X, Y, Z de l'une des faces du dodécaèdre et pris dans un ordre tel que $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ})$ soit une base directe de E. Un tel simplexe est noté $[XYZ]$.
Ainsi $[AJD]$ est un simplexe.
Combien les sommets du dodécaèdre déterminent-ils de simplexes ?

2. On appelle *matrice de Gram* associée à un triplet $(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$ d'éléments de E la matrice :

$$Gram(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3) = [g_{i,j}]$$

de coefficient générique $g_{i,j}$, $(i,j) \in [1..3]^2$, défini par :

$$\forall (i,j) \in [1..3]^2, g_{i,j} = (\mathrm{u}_i, \mathrm{u}_j)$$

Calculer la matrice de Gram associée au simplexe $[AJD]$; on donnera ses coefficients sous la forme $x + y\sqrt{5}$ avec x et y entiers.
N.B. On pourra admettre que tous les simplexes définissent la même matrice de Gram, notée $\mathcal{G}$.

3. (a) Montrer qu'étant donné deux des simplexes précédents, soit $S = [XYZ]$ et $S' = [X'Y'Z']$, il existe un automorphisme $f_S^{S'}$ unique de E transformant le premier en le second.

(b) Montrer que cet automorphisme est orthogonal, i.e. qu'il vérifie :

$$\forall \mathrm{u} \in E, \|f_S^{S'}(\mathrm{u})\| = \|\mathrm{u}\|$$

On pourra utiliser l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y, z) \mapsto \|x\overrightarrow{OX'} + y\overrightarrow{OY'} + z\overrightarrow{OZ'}\|^2$$

en exprimant sa valeur à l'aide de la matrice $\mathcal{G}$ et de la matrice colonne :

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que $f_S^{S'}$ est une rotation.

(d) On désigne par G l'ensemble des automorphismes directs de E conservant le dodécaèdre, considéré ici comme ensemble des vecteurs

$$\overrightarrow{OA}, \cdots, \overrightarrow{ON'}$$

On pourra admettre que les faces du dodécaèdre sont transformées en des faces par les éléments de G.

Montrer que G est un sous-groupe de $SO(E)$ de cardinal au plus égal à 60.

Tournez la page S.V.P.

4. On considère les endomorphismes r, s et t de E définis par leurs matrices respectives dans la base $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$:

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -1 & a \\ 1 & a & -b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$T=SR=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ a & -b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que r, s et t sont des rotations qu'on écrira sous la forme $Rot(\mathbf{u},\theta)$ en précisant $\mathbf{u}$ et θ dans chaque cas.
   N.B. On choisira dans chaque cas un vecteur $\mathbf{u}$ dont la troisième coordonnée soit positive et on désignera par Ω le milieu de AJ.

   (b) Dire brièvement ce que sont les effets respectifs de ces rotations sur le simplexe $[AJD]$.

   (c) Quels sont les ordres respectifs de ces rotations dans le groupe $SO(E)$?

5. (a) On donnera sous forme d'un tableau à double entrée à trois lignes et douze colonnes la liste des transformés respectifs de $ABCDIJKLMN$ par r, s et t (on ne fera pas figurer les éventuels calculs sur la copie).

   (b) Préciser comment obtenir simplement les transformés des dix autres points à l'aide du tableau précédent.

   (c) En déduire que r, s, t sont bien des éléments de G.

6. En mettant brièvement en évidence d'autres éléments de G analogues à r, s, t, en déduire que le cardinal de G est égal à 60.

Partie IV. Isomorphisme de G et de $\mathcal{A}_5$

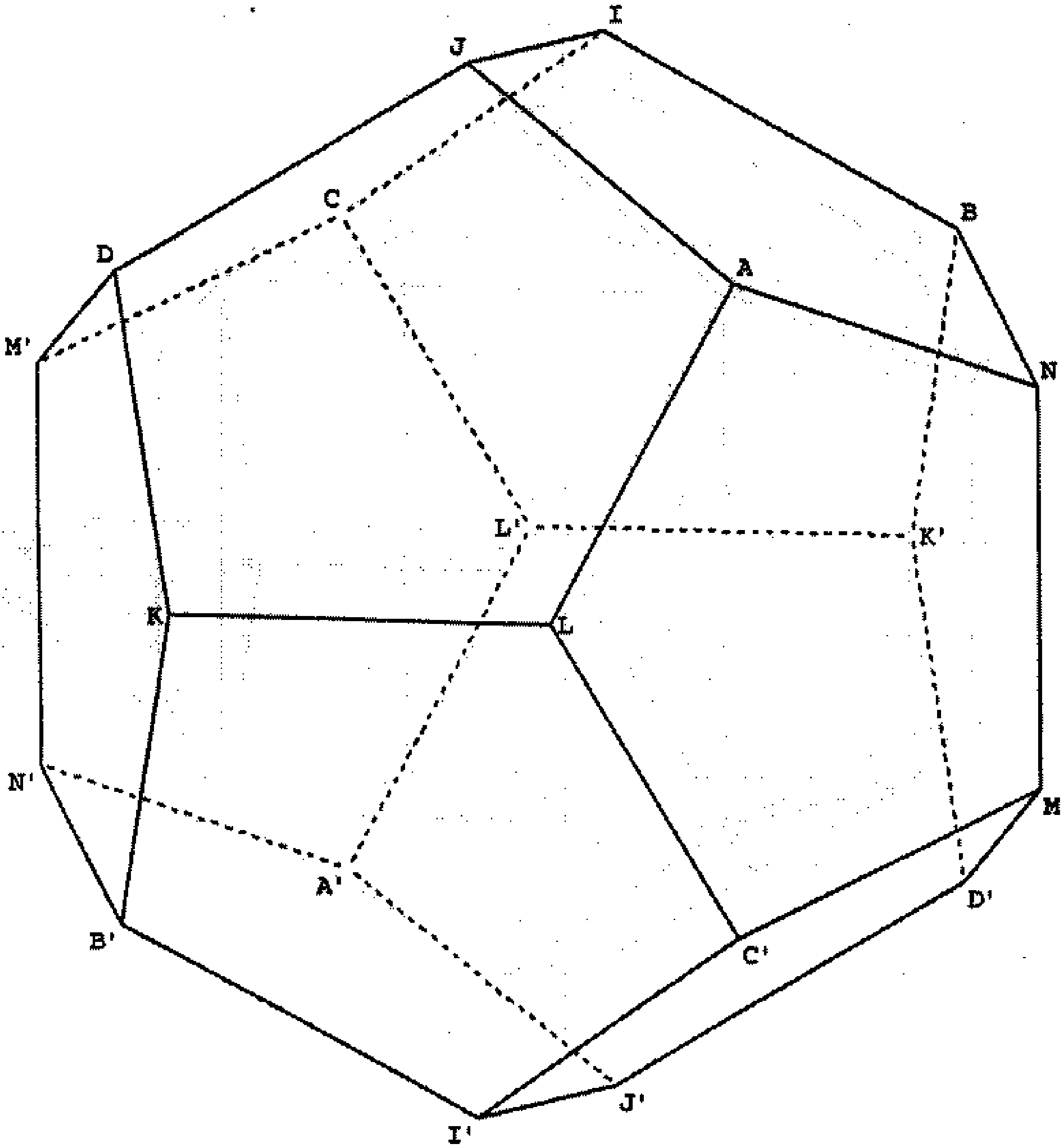
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La notation S_n désigne le groupe des permutations de l'ensemble $[1..n]$. ε désigne l'unique morphisme surjectif du groupe S_n sur le groupe multiplicatif à deux éléments $U_2 = \{-1, 1\}$ et qui prend la valeur -1 pour les transpositions. Si σ est un élément quelconque de S_n, $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.
La notation $\mathcal{A}_n$ désigne le groupe des permutations paires de l'ensemble $[1..n]$; c'est le noyau de ε.
Si p est un entier au moins égal à 2 et au plus égal à n, et si $a_1, a_2, \cdots, a_p$ sont des éléments distincts de $[1..n]$, la notation $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ désigne le p-cycle envoyant a_i sur a_{i+1} pour i variant de 1 à $p-1$ et a_p sur a_1, les autres éléments étant fixes.
Ces notions et notations s'étendent au cas du groupe des permutations d'un ensemble quelconque fini non vide.
Si $ABCDE$ est un pentagone régulier, on appelle diagonale du pentagone tout segment déterminé par deux sommets non consécutifs ; ainsi, chaque pentagone régulier possède cinq diagonales.

1. Rappeler sans démonstration le cardinal de $\mathcal{A}_5$.
2. On appelle *f-diagonale* du dodécaèdre une diagonale de l'une quelconque des faces du dodécaèdre. Ainsi, AB, BD', KJ sont par exemple des f-diagonales. On désigne par $\mathcal{D}$ l'ensemble des f-diagonales.
   Quel est le cardinal de $\mathcal{D}$?

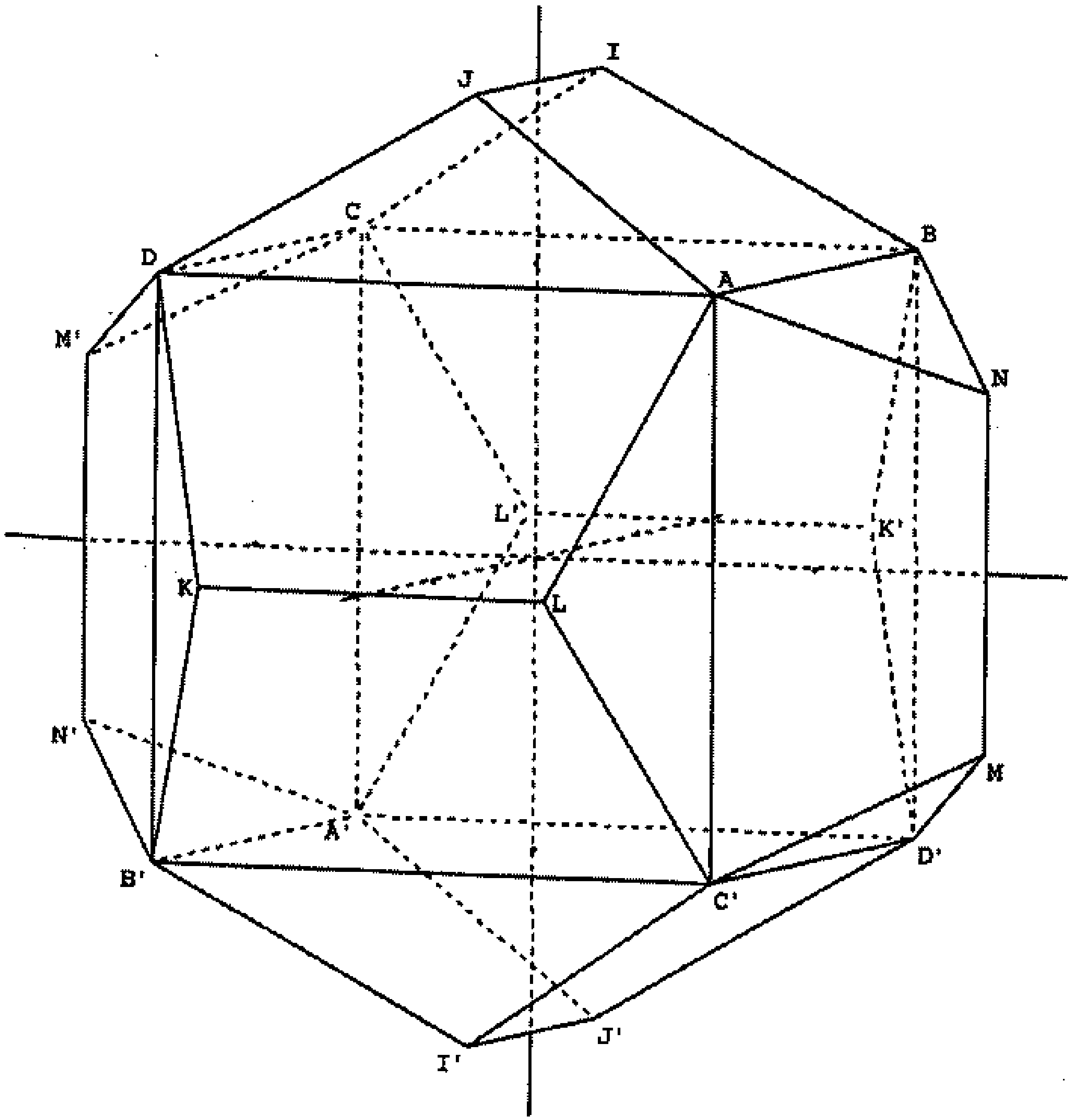
3. On met ici en évidence l'existence de cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre. Le cube initial est noté $C_0 = ABCDA'B'C'D'$.
   (a) On désigne par $C_i, i = 1,2,3,4$ le cube déduit de C_0 par s^i. Montrer qu'on obtient ainsi cinq cubes distincts inscrits dans le dodécaèdre et que chaque arête de l'un de ces cinq cubes est un élément de $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que chaque élément de $\mathcal{D}$ est arête de l'un de ces cinq cubes et un seul (on pourra raisonner sur la seule f-diagonale AD).
   (c) En déduire que les cinq cubes C_i sont les seuls cubes de centre 0 et isométriques à C_0 inscrits dans le dodécaèdre.
4. (a) Montrer que tout élément f de G permute l'ensemble $\mathcal{K}$ des cinq cubes précédents. On désigne par Φ l'application ainsi définie de G dans le groupe $S_{\mathcal{K}}$ des permutations de $\mathcal{K}$. On notera $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des permutations paires de $S_{\mathcal{K}}$.
   (b) Montrer que Φ est un morphisme de groupes.
   (c) Expliciter par un tableau à double entrée à trois lignes et cinq colonnes l'effet produit par r, s, t sur les cubes $C_i, (i = 0,1,2,3,4)$.
   (d) Montrer que $\Phi(r), \Phi(s), \Phi(t)$ sont des permutations paires de $\mathcal{K}$.
5. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(f(\mathbf{i}), f(\mathbf{j}), f(\mathbf{k}))$ pour qu'un élément f de $SO(E)$ laisse le cube C_0 globalement invariant (on pourra considérer les axes des faces de ce cube).
   (b) En déduire que le cardinal du sous-groupe G_0 de G constitué des isométries directes laissant globalement invariant le cube C_0 (c'est le *stabilisateur* de C_0 dans G) est égal à 12 et préciser l'ensemble de ses éléments.
   (c) Montrer que, pour tout i de 1 à 4, le stabilisateur G_i de C_i dans G est un sous-groupe de G isomorphe à G_0.
   (d) Préciser $G_0 \cap G_1$ puis $G_0 \cap G_1 \cap G_2$.
   En déduire que Φ est injectif.
6. (a) Soit S un sous-groupe de $S_{\mathcal{K}}$; on note :

$$S_+ = S \cap \mathcal{A}_{\mathcal{K}} \quad et \quad S_- = S \cap (S_{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{K}})$$

   Montrer que, si S_- est non vide, alors S_+ et S_- ont même cardinal ; en déduire que, si $\Phi(G)$ possède un élément impair, alors il en contient nécessairement 30.
   (b) Montrer que, si f est un élément de G tel que : $\varepsilon(\Phi(f)) = -1$, alors f est d'ordre pair dans G.
   (c) En déduire, en utilisant les ordres des éléments de G, étudiés dans $III.6$, que G est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.
7. Combien y a-t-il d'éléments de G transformant l'un quelconque des cinq cubes en un autre ?



Le dodécaèdre construit au **II**



Construction du dodécaèdre