A 2004 Math MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière MP.

Cet énoncé comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte deux problèmes complètement indépendants.

Problème I

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable ; le laplacien de la fonction f est, par définition, la fonction, notée Δf, définie dans l'ouvert U par la relation suivante :

$$\Delta f\,(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y)\,.$$

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable, est harmonique dans U si et seulement si son laplacien est nul dans U :

$$\Delta f\,(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) = 0.$$

Exemple : en électrostatique, le potentiel électrique dans le vide est harmonique.

Le but du problème est de donner des exemples de telles fonctions puis de démontrer certaines propriétés de ces fonctions : le principe du maximum, la propriété de moyenne, le fait que les fonctions bornées harmoniques dans tout le plan sont constantes.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne.

Quelques exemples de fonctions harmoniques :

1. Démontrer que les fonctions complexes f et g_n, $n \in \mathbb{N}$, définies dans le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations ci-dessous, sont harmoniques :

$$f(x, y) = e^{x + i\ y}, \quad g_n(x, y) = (x + i\ y)^n .$$

2. Déterminer les fonctions u réelles, de classe C^2, définies sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, telles que chaque fonction h, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé du point O $\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}\right)$ par la relation ci-dessous, soit harmonique

$$h(x, y) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Poser si nécessaire : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Déterminer les fonctions v réelles, de classe C^2, définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telles que chaque fonction k, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe $y\acute{}Oy$ $\left(\mathbb{R}^2 \setminus y\acute{}Oy\right)$ par la relation ci-dessous, soit harmonique.

$$k(x, y) = v\left(\frac{y}{x}\right).$$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations suivantes :

$$u_n(x, y) = (-1)^n \frac{(x + iy)^n}{(2n)!}.$$

4. Soit K un ensemble fermé borné quelconque du plan $\mathbb{R}^2$; démontrer que la restriction $u_{n|K}$ de la fonction u_n au fermé K est le terme général d'une série de fonctions uniformément convergente.

En déduire que la série de fonctions de terme général u_n converge en tout point du plan et que sa somme, la fonction φ, définie par la relation suivante

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y),$$

est continue dans le plan.

5. Démontrer que cette fonction φ est harmonique dans tout le plan $\mathbb{R}^2$.

Principe du maximum :

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon strictement positif r $(r > 0)$; soit C le cercle de centre O et de rayon r :

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le r^2\right\}, \\ C &= \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\right\}. \end{aligned}$$

Étant donné un entier strictement positif p $(p > 0)$, soit f_p la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par la relation suivante :

$$f_p(x,y) = f(x,y) + \frac{x^2+y^2}{p}.$$

6. Démontrer l'existence d'un point M_p de coordonnées a_p et b_p, appartenant au disque fermé D en lequel la fonction f_p atteint son maximum :

$$f_p(a_p, b_p) = \max_{(x,y)\in D} f_p(x,y).$$

7. Démontrer que, si le point M_p appartient à l'intérieur du disque D, les deux dérivées secondes de la fonction f_p, obtenues en dérivant deux fois par rapport à x ou deux fois par rapport à y, sont, en ce point M_p, négatives ou nulles :

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leq 0 \ ; \ \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leq 0.$$

8. En déduire, en calculant par exemple le laplacien de la fonction f_p, que le point M_p est situé sur le cercle C.

9. Démontrer qu'il existe un point P de coordonnées a et b du cercle C en lequel la fonction f atteint son maximum sur D :

$$f(a,b) = \max_{(x,y)\in D} f(x,y).$$

10. En déduire que deux fonctions harmoniques dans le plan $\mathbb{R}^2$ égales le long d'un cercle C du plan (de rayon strictement positif), sont égales dans tout le disque D de frontière C.

Propriété de la moyenne

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans le plan $\mathbb{R}^2$. Étant donnés un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 et un réel ρ positif ou nul, soit F la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0,\infty[$ par la relation suivante :

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\ \cos\theta,\ y_0 + \rho\ \sin\theta)\, d\theta.$$

11. Démontrer que la fonction F est définie et continue sur la demi-droite fermée $[0,\infty[$.

12. Démontrer que la fonction F est continûment dérivable. Préciser sa dérivée $F\,'(\rho)$.

13. Démontrer que le produit $\rho.F\,'(\rho)$ est égal à la valeur d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle $\alpha = A(x,y)\ dx + B(x,y)\ dy$ le long d'un arc orienté Γ :

$$\rho.F\,'(\rho) = \int_\Gamma (A(x,y)\ dx + B(x,y)\ dy).$$

Préciser la forme différentielle α et l'arc orienté Γ.

14. Démontrer que la fonction F est une fonction constante ; préciser sa valeur.

15. Soit D le disque fermé de centre le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) et de rayon r $(r > 0)$; démontrer que l'intégrale double I de la fonction f étendue au disque D se calcule simplement en fonction de $f(x_0, y_0)$ suivant la relation :

$$I = \iint_D f(x, y)\ dx\ dy = \pi\ r^2\ f(x_0, y_0).$$

Fonctions harmoniques bornées dans le plan :

Soit f une fonction définie dans tout le plan, réelle, harmonique et bornée : il existe donc une constante C telle qu'en tout point (x, y) du plan :

$$|f(x, y)| \leq C.$$

16. Soient deux disques fermés D_1 et D_2 de centres, distincts l'un de l'autre, O et M_0, de coordonnées respectives $(0, 0)$ et (x_0, y_0). Soit r le rayon commun de ces disques. La distance d des centres O et M_0 (égale à $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$) est supposée strictement inférieure au rayon r $(0 < d < r)$. Soit L_2 l'ensemble des points du disque D_2 qui ne sont pas dans le disque D_1.

En considérant par exemple un disque contenu dans l'intersection des disques D_1 et D_2, démontrer que l'aire de L_2 est majorée par l'expression $\pi\ r\ d$.

17. À l'aide par exemple de la question 15, donner un majorant de la valeur absolue de la différence $f(x_0, y_0) - f(0, 0)$ au moyen de la constante C, du rayon r et de d.

En déduire que la fonction f est constante.

Problème II

Soit φ la fonction définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\text{si } |t| < 1,\ \varphi(t) = \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right) \quad ; \quad \text{si } |t| \geq 1, \quad \varphi(t) = 0.$$

Un difféomorphisme f de la droite réelle $\mathbb{R}$ sur elle-même de classe C^1 est dit difféomorphisme de classe C^∞ si la fonction f est indéfiniment dérivable.

Un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^\infty$:

18. Démontrer que la restriction φ_I de la fonction φ à l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ est indéfiniment dérivable et que, pour tout entier n, il existe un polynôme P_n tel que la dérivée $\varphi_I^{(n)}$ de φ_I d'ordre n s'écrive sous la forme suivante :

$$\varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2 - 1)^{2\ n}} \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right).$$

19. En déduire que la fonction φ est indéfiniment dérivable sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Justifier, sans calcul, l'existence d'un majorant M de la valeur absolue de la dérivée première φ' sur la droite réelle :

$$M = \sup_{t\ \in\ \mathbb{R}} |\varphi'(t)|.$$

Étant donné un réel λ $(\lambda \in \mathbb{R})$, soit ψ_λ la fonction définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\psi_\lambda(x) = x + \lambda\ \varphi(x).$$

20. Démontrer que, si la valeur absolue du réel λ est strictement majorée par $1/M$, $(|\lambda| < 1/M)$, la fonction ψ_λ est une bijection de la droite réelle $\mathbb{R}$ sur elle-même et un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}$.

Quelle est, dans ces conditions $(|\lambda| < 1/M)$, l'image du segment $\overline{I} = [-1, 1]$ par l'application $x \longmapsto \psi_\lambda(x)$? Que dire de la restriction de l'application $x \longmapsto \psi_\lambda(x)$ aux demi-droites fermées $]-\infty, -1]$ et $[1, \infty[$?

Un difféomorphisme de classe C^1 du plan $\mathbb{R}^2$, défini par des fonctions indéfiniment dérivables est appelé difféomorphisme de classe C^∞.

Difféomorphismes du plan $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞ :

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne et rapporté à un repére orthonormé Oxy.

Étant donnés un réel λ $(\lambda \in \mathbb{R})$, un réel strictement positif r $(r > 0)$ et un point P du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (p, q), soit $\theta^P_{\lambda,\ r}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par la relation suivante :

$$\theta^P_{\lambda,\ r} : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + \lambda\ \varphi\left(\left((x-p)^2 + (y-q)^2\right)/r^2\right) \\ y \end{pmatrix}.$$

L'image du point de coordonnées (x, y) par l'application $\theta^P_{\lambda,\ r}$ est le point de coordonnées :

$$\left(x + \lambda\ \varphi\left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2}\right),\ y\right).$$

21. Quelle est l'image par cette application $\theta^P_{\lambda,\ r}$ du point P ? du cercle C^P_r de centre le point P et de rayon égal à r ? de l'ouvert Ω^P_r des points du plan situé à une distance du point P strictement supérieure à r ?

Existence de difféomorphismes du plan de classe C^∞ :

22. Démontrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que, si le réel λ a une valeur absolue strictement inférieure à m $(|\lambda| < m)$, l'application $\theta^P_{\lambda,\ r}$ est une bijection du plan $\mathbb{R}^2$ sur lui-même et un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

Soient n points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ du plan $\mathbb{R}^2$, deux à deux distincts, et deux points B et B', distincts entre eux et distincts des points A_i, $1 \leq i \leq n$. Les coordonnées des points A_i, $1 \leq i \leq n$, sont (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$; celles de B et B' respectivement (b, c) et (b', c').

Le but des questions 23 à 26 est de montrer qu'il existe un difféomorphisme de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ transformant B en B' et laissant les points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ invariants. Un difféomorphisme de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ laissant les points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ invariants est dit avoir la propriété $\mathcal{A}$.

Il est admis que l'ensemble des difféomorphismes de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Trois cas sont envisagés :

1^{er} cas : Les points B et B' ont même ordonnée ; les ordonnées des points A_i, $1 \leq i \leq n$, sont toutes différentes de celle de B $(y_i \neq c = c')$.

23. Démontrer, dans ce cas, que, si les points B et B' sont suffisamment proches, il existe une application $\theta^P_{\lambda,\ r}$ transformant B en B' et laissant les A_i, $1 \leq i \leq n$ invariants.

24. Démontrer, toujours dans ce cas, que, quelle que soit la position des points B et B', il existe une suite finie de bijections $\theta^{P_i}_{\lambda,\ r}$, $0 \leq i \leq k$, telle que la composée F de ces applications transforme B en B' et ait la propriété $\mathcal{A}$.

$$F = \theta^{Pk}_{\lambda,\ r} \circ \theta^{P_{k-1}}_{\lambda,\ r} \circ \ldots \circ \theta^{P_0}_{\lambda,\ r}.$$

$2^{ième}$ cas : Les points B et B' ont même abscisse ; les abscisses des points A_i, $1 \leq i \leq n$, sont toutes différentes de celle de B $(x_i \neq b = b')$.

25. Indiquer comment modifier l'application $\theta^P_{\lambda,\ r}$ en $\eta^P_{\lambda,\ r}$ pour construire un endomorphisme G transformant B en B' et ayant la propriété $\mathcal{A}$.

$3^{ième}$ cas : Les points B et B' n'ont plus d'abscisse ou d'ordonnée commune.

26. Établir l'existence d'un difféomorphisme H transformant B en B' et ayant la propriété $\mathcal{A}$.

Difféomorphisme transformant une suite de n points $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ en une suite de n points $A'_1,\ A'_2, \ldots,\ A'_n$.

27. Soient deux suites de points, deux à deux distincts, $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ et $A'_1,\ A'_2, \ldots,\ A'_n$ du plan $\mathbb{R}^2$. Démontrer qu'il existe un difféomorphisme K de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$, tel que chaque point A_i ait pour image le point A'_i.

FIN DE L'ÉPREUVE