10 décembre 2014

Algèbre et géométrie

Problème

Lois de Kepler

On se place dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On souhaite étudier la trajectoire de deux astres en interaction gravitationnelle. On note $M_1(t)$ et $M_2(t)$ les centres de masse de chacune des planètes, m_1 et m_2 leurs masses. On suppose que les applications $t \mapsto M_i(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ et que $M_1(t) \neq M_2(t)$ sur l'intervalle de temps considéré (il n y a pas de collision entre les deux astres). Rappelons que les lois de Newton entraînent que les accélérations au temps t sont données par les relations.

$$\overrightarrow{a}_i(t) = g\frac{m_j}{M_1(t)M_2(t)^3}\overrightarrow{M_i(t)M_j(t)}$$

pour i et j tels que $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

1. On note $G(t)$ le barycentre du système $((M_1(t), m_1), M_2(t), m_2))$.

(a) Démontrer que l'accélération de $G(t)$ est nulle.

(b) En déduire la trajectoire du point de $G(t)$ en termes du point $G(0)$ et de sa vitesse initiale.

Dans la suite, par un changement de référentiel galiléen, on se ramène au cas où $G(t) = 0$ pour $t \in \mathbf{R}$. On pose désormais $M(t) = M_1(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ et on note $(x(t), y(t), z(t))$ les coordonnées de $M(t)$.

2. Démontrer qu'il existe une constante k qu'on explicitera de sorte que l'accélération du point M à l'instant t soit donnée par la relation

$$\overrightarrow{a}(t) = -\frac{k}{OM(t)^3}\overrightarrow{OM(t)}. \tag{1}$$

On suppose qu'il existe un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant 0 et une solution $t \mapsto M(t)$ de l'équation de Newton (1) sur l'intervalle I. On suppose qu'on a les relations $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$. On note σ la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $Z = 0$.

3. (a) Démontrer que $t \mapsto \sigma(M(t))$ est également solution de l'équation de Newton.

(b) En déduire que $M(t)$ appartient au plan d'équation $Z = 0$ pour $t \in I$.

T.S.V.P

4. Pour $t \in I$ on note $C(t) = x(t)y'(t) - y(t)x'(t)$ (le moment cinétique du premier astre par rapport à l'origine est $m_1 C(t)$).

(a) Démontrer que $C(t)$ est constant. On note C sa valeur.

(b) Décrire la trajectoire lorsque $C = 0$.

On suppose désormais $C \neq 0$. On utilise des coordonnées polaires. Pour cela, on pourra utiliser sans démonstration qu'il existe une application $\theta : I \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $M(t) = r(t)(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$ pour $t \in I$.

(c) Démontrer que $C = r(t)^2\theta'(t)$ pour $t \in I$. Que peut-on dire de la croissance de la fonction θ ?

(d) Démontrer la deuxième loi de Kepler : « les aires balayées par le rayon vecteur d'une planète sont proportionnelles au temps ».

5. **(a)** Démontrer que r satisfait l'équation différentielle

$$r'' + \frac{k}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0.$$

On pose $w(t) = r(t) - \frac{C^2}{k}$ et on note $\overrightarrow{A}(t) = (x(t), y(t), w(t))$ pour $t \in I$.

(b) Exprimer $\overrightarrow{A}''(t)$ en fonction de $r(t)$ et de $\overrightarrow{A}(t)$.

(c) Démontrer que le produit vectoriel $\overrightarrow{A}'(t) \wedge \overrightarrow{A}(t)$ est constant sur I.

(d) Démontrer qu'il existe des nombres réels $a, b, c, d \in \mathbf{R}^4$ tels que

$$ar(t) + bx(t) + cy(t) = d$$

pour $t \in I$.

(e) En déduire que la trajectoire de M est contenue dans une composante connexe d'une conique C.

(f) Démontrer qu'il existe un nombre réel e qu'on explicitera, $A \in \mathbf{R}_+^*$ et $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ tels que

$$r(t) = \frac{A}{1 + e\cos(\theta(t) - \theta_0)}$$

pour $t \in I$.

(g) Démontrer que la conique C admet l'origine comme foyer et e comme excentricité. On a ainsi démontré la première loi de Képler : « la trajectoire est contenue dans une conique dont le centre de masse est un des foyers ».

6. **(a)** Démontrer qu'une solution maximale de l'équation (1) est définie sur $\mathbf{R}$.

Désormais $I = \mathbf{R}$.

(b) On suppose que la trajectoire est bornée. Que peut-on dire de la limite de $\theta(t)$ en $+\infty$ et en $-\infty$? Quelle est la nature de la conique C ?

(c) Démontrer qu'il existe un nombre réel strictement positif T tel que $M(T) = M(0)$.

(d) Démontrer que la trajectoire est périodique.

On suppose que la trajectoire est supportée par une ellipse C. On note T la période de la trajectoire et a le demi-grand axe de l'ellipse. On note S la surface de l'enveloppe convexe de l'ellipse.

(e) Donner une relation entre S, C et T.

(f) Donner une relation entre S, a et l'excentricité e.

(g) Commenter la troisième loi de Kepler : « pour toutes les orbites planétaires le rapport du carré des périodes de révolution au cube du demi-grand axe de l'orbite est constant ».

Remarque. Johannes Kepler est un astronome allemand qui vécut de 1571 à 1630. Les deux premières lois sont publiées en 1609 dans *Astronomia Nova*, la troisième date de 1618. Isaac Newton dans sa publication *PhilosophiœNaturalis Principia Mathematica* de 1687 montre comment déduire les lois de Kepler des lois du mouvement qu'il introduit dans cet ouvrage, apportant ainsi un argument très fort pour sa théorie alors révolutionnaire. Cet ouvrage est considéré par beaucoup comme l'ouvrage qui ancre pour la première fois solidement la physique sur les mathématiques.

Dessin pour la solution de l'exercice du 3 décembre 2014

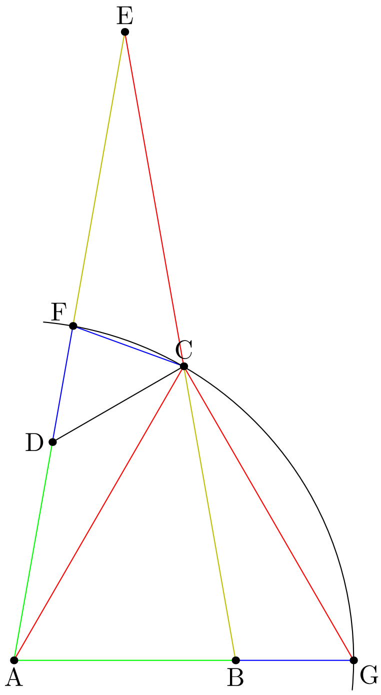

Figure 1