Agregation Interne de Mathématiques

Intégration 2011-2012

I .

1) Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{-n}{k}}}{k^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{e.n}$

2) $f \in \mathcal{C}'([0,1];\mathbb{R})$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \left(f(\frac{2k+1}{2n}) - f(\frac{k}{n})\right) \to_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(f(1) - f(0)\right)$

3) Calculer :

a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}\right)$

b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=n+1}^{2n} (k^{\frac{1}{k}})\right)$

II .

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit bornée. On pose $M = \sup_{t\in[a,b]}(\mid f'(t) \mid)$.

On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que :

$$\mid \int_a^b f(x)dx \mid \leq \frac{(b-a)^2}{4}.M$$

Etudier le cas d'égalité.

III .

soit $a < b$ et $E = \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}_+^*)$. Déterminer $\inf_{f\in E} \left(\left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\right)\right)$.

IV .

Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ strictement croissante et surjective, et soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

On suppose que $\forall x \in [0,1] : \int_0^1 [\min(x, g(x))] . f(t) dt = 0$.

Montrer que f est identiquement nulle.

V .

$0 < a < b$

a) Calculer $\lim_{x \to 0} \left(\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$

b) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$

VI .

$f : x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ et $g : x \to \frac{dt}{t \ln(t)}$

a) Définition et dérivabilité de la fonction f.

b) En déduire que $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \ln(2)$.

VII .

1) a) Montrer que la fonction $t \to \ln(\sin(t))$ est intégrable sur $]0, \pi[$, et la fonction $t \to \ln(\cos(t))$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

b) Montrer que $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$.

c) En déduire que $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) dt = -\pi \ln(2)$

2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{n}).x + 1 \right) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}$

b) En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1} \left(\sin(\frac{k\pi}{n}) \right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

c) En déduire que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -\pi . \frac{\ln(2)}{2}$

VIII .

1) a) Montrer que $(x^n-1)^2=\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2\cos(\frac{2k\pi}{n}).x+1\right)$

b) En déduire que $\int_0^{2\pi}\ln\left(x^2-2\cos(\theta).x+1\right)d\theta=\begin{cases}4\pi\ln(|x|) & si|x|>1\\ 0 & si|x|<1\end{cases}$

c) En déduire que $\int_0^{\pi}\ln\left(x^2-2\cos(\theta).x+1\right)d\theta=\begin{cases}2\pi\ln(|x|) & si|x|>1\\ 0 & si|x|<1\end{cases}$

2) Justifier et calculer $\int_0^{\pi}\ln\left(2-2\cos(\theta)\right)d\theta$ et $\int_0^{\pi}\ln\left(2+2\cos(\theta)\right)d\theta$

(On pourra utiliser le résultat de l'exo. 7).

IX .

$f\in\mathcal{C}\left([0,1];\mathbb{R}\right)$. calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f(t^n)dt\right)$

X .

1) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)dt$

a) Montrer que si $n\geq 2$, alors $nI_n=(n-1)I_{n-2}$

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*: nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2}$

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d) En déduire que $I_n\sim_{+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

2) a) Montrer que $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\sqrt{n}}(1-\frac{x^2}{n})^n dx\right)=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}.I_{2n+1})$.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=??$

XI .

Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 n\ln(1+t^n)dt\right)$

(On pourra faire le chg. de variable $x=t^n$) (Rappel : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$)

(Réponse= $\frac{\pi^2}{12}$)

XII .

1) Soit $a,b>0$

   Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$

2) Calculer :

   a) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

   b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+2n}$

   c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+3n}$

   d) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+4n}$

XIII .

Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{\frac{-1}{n}}.(1+\frac{x}{n})^{-n}dx\right)$

XIV .

$f:x\to\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}dt.$

Définition, dérivabilité et calcul de $f(x)$.

XV .

$f : x \to \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$

1) Définition, dérivabilité et calcul de $f'(x)$.

2) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

XVI .

$f : x \to \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} . t^x dt$

Définition, dérivabilité et calcul de $f(x)$.

XVII .

1) a) Justifier l'existance de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

b) La fonction $t \to \frac{\sin(t)}{t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) soit $f : x \to \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$

a) Déterminer la domaine de définition D de f.

b) Montrer que f est continue sur D.

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

XVIII .

1) Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$

2) a) Montrer que $\forall x > 0 : \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\frac{x}{t})}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt = \frac{\pi^2}{4}$.

XIX .

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

c) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^*$: $x.f'(x) - f(x)$.

d) Exprimer f à l'aide de fonction usuelle.

XX .

$f : x \to \int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2\cos(\theta).x + 1\right) d\theta$

1) Déterminer la domaine de définition de f.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$: $f'(x) = 4. \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)t^2+(x-1)^2)(1+t^2)} dt$

c) En déduire que : $f(x) = \begin{cases} 2\pi \ln(|x|) & si|x| > 1 \\ 0 & si|x| < 1 \end{cases}$

d) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_0^{\pi} \ln(2 - 2\cos(\theta))d\theta$ et $\int_0^{\pi} \ln(2 + 2\cos(\theta))d\theta$

Indication : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2 - 2\cos(\theta).x + 1 \geq \sin^2(\theta)$ et utiliser le théorème de convergence dominée.

3) a) Déterminer le developpement en série entière de la fonction : $g : x \to \ln\left(x^2 - 2\cos(\theta).x + 1\right)$. $\theta \in]0, \pi[$.

b) En déduire que $\forall x \in]-1, 1[$: $f(x) = 0$.

c) Calculer $f(x)$ dans le cas où $|x| > 1$.

4) a) Déterminer le developpement en série de Fourrier de la fonction

$$h : \theta \to \ln\left(x^2 - 2\cos(\theta).x + 1\right) \text{ avec } x \in]-1, 1[$$

b) En déduire la valeur de $f(x)$.

XXI .

Montrer que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.