Université Joseph Fourier **Année 2015-2016**

UFR IM^{2}AG **Agrégation interne**

Intégration

Généralités

Exercice 1. Soit $a < b$ deux réels et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue de signe constant. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Exercice 2. Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On note m le minimum de f et M son maximum sur $[a, b]$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq -mM$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}\,, \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

(1) Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

(2) En considérant $Q(t)f(t)$ où Q est un polynôme bien choisi, montrer que la fonction f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

Exercice 5. *Lemme de Gronwall.* Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle quíl existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x \geq 0,\ f(x) \leq k\int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que f est identiquement nulle.

Suites de suites de fonctions sur un segment

Exercice 6. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dt$.
(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
(ii) Montrer que (I_n) décroit, que nI_nI_{n-1} est constant et que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 7. Irrationalité de π. On suppose que $\pi = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit $f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(p - qx)^n$ et $I_n = \int_0^\pi f_n(x)\sin x dx$.
(i) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
(ii) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $f_n^{(k)}(p/q) \in \mathbb{Z}$ (on remarquera que $f_n(\frac{p}{q} - x) = f_n(x)$).
(iii) En intégrant par parties, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$ et en déduire une contradiction.

Exercice 8. Soit n un entier non nul. Exprimer $I_{n,p} := \int_0^1 x^n(1-x)^p dx$ à l'aide de factorielles.

Exercice 9. On considère la suite (a_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u_n(x) = \dfrac{n^2 - x^2}{(n^2+x^2)^2}$.

(i) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)dx$ converge.

(ii) Soit $a \geq 0$. Montrer : $\displaystyle\int_0^a u_n(x)dx = \frac{a}{n^2+a^2}$. (On pourra faire une intégration par parties.)

(iii) Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

(iv) En déduire :

$$\int_0^a \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}.$$

Exercice 10. Montrer que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}(f(1) - f(0)) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(On pourra poser $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, écrire $F(1) - F(0) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et montrer qu'il existe $\theta_{n,k} \in [k/n, (k+1)/n]$ tel que $F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2n^2}f'(\theta_{n,k})$.)

Exercice 11. Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a, b]$. On pose $I_n(f) = \int_a^b e^{int}f(t)dt$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n(f) = 0$.

Intégrales généralisées

Exercice 12. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

(i) A-t-on ($\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge) $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

(ii) Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est uniformément continue et que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge alors f a pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 13. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante. On pose $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x) = f(x)\sin x$$

Montrer que les intégrabilités de f et de g sont équivalentes.

Exercice 14.

(i) Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{1}{n} & \text{si } x \in [n^2 - n, n^2 + n] \\ f_n(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers 0. A-t-on : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 0$?

(ii) Soit $f_n = [0,1] \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\begin{cases} f_n(x) & = & nx^{n-1} \text{ si } x \in [0,1[\\ f_n(1) & = & 0. \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

A-t-on : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 0$?

Exercice 15. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est divergente mais que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

Exercice 16. Soient a et b deux réels. Discuter en fonction de a et b la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^a)}{t^b} dt$.

Problèmes d'interversion de limites

Exercice 17. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

(i) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
(ii) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
(iii) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 18. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$.

(i) Montrer que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer G en fonction de F.
(ii) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 19. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))dt$.

(i) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
(ii) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' puis F'' sous forme intégrale.
(iii) Montrer que F est solution de l'équation de Bessel $xF''(x) + F'(x) + xF(x) = 0$. (On pourra calculer la dérivée par rapport à t de $\sin(x\sin(t))$.)

Exercice 20. [Transformée de Laplace] Soit f une fonction continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $A > 0$ tels que :

$$\forall t \geq 0, \; |f(t)| \leq Ae^{-at}.$$

On définit la fonction F par $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$.

(i) Montrer que F est dérivable sur $]a,+\infty[$ et exprimer F' sous forme intégrale.
(ii) On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0} xF(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(iii) On suppose que f' admet une limite en $+\infty$. On pose $G(x) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}dt$. Démontrer :

$$G(x) = xF(x) - f(0).$$

Problèmes de densité

Exercice 21.
(i) Démontrer que la fonction $\lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle pour $x \leq 0$, strictement positive pour $x > 0$.
(ii) Démontrer qu'il existe une fonction $\lambda_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positive, non identiquement nulle, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support contenu dans l'intervalle fermé $[0, 1]$.
(iii) Démontrer qu'il existe une fonction $\lambda_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\lambda_3(x) = 0$ pour $x \leq 0$, $\lambda_3(x) = 1$ pour $x \geq 1$. On pourra considérer la fonction définie sur $[0, 1]$ par $(\int_0^x \lambda_2(t)dt)/(\int_0^1 \lambda_2(t)dt)$.
(iv) Soient h et k des nombres réels tels que $0 < h < k$. Démontrer qu'il existe une fonction $\lambda_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs dans $[0, 1]$, dont le support est contenu dans $[-h, h]$, et qui vaut 1 sur $[-k, k]$.
(v) En conclure que l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$ contient les indicatrices d'intervalles ouverts bornés. (On rappelle que pour $k \geq 0$, $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, à support compact.)

Exercice 22. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Le *produit de convolution de f et g* est défini par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)\, du.$$

(i) Montrer que $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
(ii) Montrer que le produit de convolution est associatif.
(iii) On suppose qu'il existe un entier k tel que g soit une fonction $\mathcal{C}^k$ *à support compact*. Montrer que $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f \star g)^p$ pour tout entier $p \in \{0, \cdots, k\}$.

Exercice 23. Soit g_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_0(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases}.$$

(i) Montrer rapidement que g_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
(ii) Montrer que la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\int_{-1}^x g_0(t)\, dt}{\int_{-1}^1 g_0(t)\, dt}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$, positive ou nulle à support dans $[-1, 1]$ et d'intégrale égale à 1.
(iii) Pour tout entier n, on définit g_n par $g_n(x) = ng(nx)$. Montrer que si φ est une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}$, la suite $\varphi \star g_n$ converge *uniformément* vers φ sur $\mathbb{R}$.
(iv) En déduire que les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ forment un ensemble dense dans L^1.

Transformation de Fourier

Exercice 24. Soient f et g deux fonctions intégrables. On a
$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)\,dt.$$

Exercice 25. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$, avec $\alpha > 0$. Existe-t-il une valeur de α pour laquelle la fonction et sa transformée de Fourier sont égales ?

Exercice 26.
(i) Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice d'un intervalle.
(ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n la fonction indicatrice de $[-n, n)$ et h la fonction indicatrice de $[-1, 1]$. Calculer explicitement $g_n * h$. Montrer que $g_n * h$ est la transformée de Fourier d'une fonction f_n que l'on déterminera.
(iii) Montrer que $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\lim_{n\to\infty} ||f_n||_1 = +\infty$.
(iv) En déduire que l'application $f \to \hat{f}$ envoie $L^1(\mathbb{R})$ dans un sous-espace propre de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$.