Agrégation Interne

Espaces $\mathcal{L}^p$. Produit de convolution. Transformation de Fourier.

On pourra revoir les points de cours suivant :
- intégrales définies et généralisées ;
- théorème de convergence dominée, théorèmes de continuité et de dérivation des fonctions définies par une intégrale ;
- fonctions d'une variable réelle continues, uniformément continues, convexes, inégalités de convexité ;
- semi-normes et normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.

On rappelle le théorème de convergence dominée.

Théorème 1 (Convergence dominée) *Soient $I = [a, b[$ un intervalle réel avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles ou complexes telle que :*

1. *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;*
2. *il existe une fonction φ continue par morceaux sur I à valeurs réelles positives telle l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ est convergente et $0 \leq |f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Dans ces conditions les fonctions f_n et f sont absolument intégrables et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

À toute partie I de $\mathbb{R}$, on associe la fonction indicatrice (ou caractéristique) de I définie par :

$$\begin{array}{llll} \mathbf{1}_I : & \mathbb{R} & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ si } x \notin I \end{array} \right. \end{array}$$

On étend l'addition et la multiplication des réels positifs à $\overline{\mathbb{R}^+}$ en convenant que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $a + (+\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$, pour tout $a \in \mathbb{R}^{+,*}$, $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ et $\dfrac{1}{0} = +\infty$, $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Le support d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est l'adhérence de l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$. On le note $\operatorname{supp}(f)$.

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est à support compact si $\operatorname{supp}(f)$ est compact, ce qui revient à dire qu'il est borné ou encore qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset [-\alpha, \alpha]$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision :

$$a_0 = -\infty < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = +\infty$$

telle que la fonction f soit continue chacun des intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq p)$ et admette des limites à droite et à gauche en chacun des points a_k $(1 \leq k \leq p)$.

Une telle fonction est Riemann-intgrable sur tout segment $[\alpha, \beta]$ et on dit qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < +\infty$, ce qui revient à dire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt$ est absolument convergente.

$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont bornées.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$.

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\, dt < +\infty$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$, on note $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

On définit de manière analogue les ensembles $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*}, \mathbb{C})$ pour $1 \leq p \leq +\infty$ ($-\infty$ est remplacé par 0).

– I – Inégalités de Hölder

1. Soit p un réel tel que $1 \leq p < +\infty$.
   Montrer que :
   $$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \ (x + y)^p \leq 2^p (x^p + y^p)$$
2. Déduire de la question précédente que pour $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
3. Soit $(p_k)_{1 \leq k \leq r}$ une famille de $r \geq 2$ réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{p_k} = 1$.

   Montrer que :
   $$\forall (x_1, \cdots, x_r) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^r, \ \prod_{k=1}^{r} x_k \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{p_k} x_k^{p_k}$$
   (inégalité de Young).

4. Soient r un entier naturel non nul, $p_1, \cdots, p_r$ une suite d'éléments de $[1, +\infty]$ telle que $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{p_k} = 1$ et, pour tout k compris entre 1 et r, f_k une fonction dans $\mathcal{L}^{p_k}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   Montrer que la fonction $f = \prod_{k=1}^{r} f_k$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $\|f\|_1 \leq \prod_{k=1}^{r} \|f_k\|_{p_k}$ (inégalité de Hölder).
5. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et une norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
6. Soient r un entier naturel non nul, $p_1, \cdots, p_r, p$ une suite d'éléments de $[1, +\infty]$ telle que $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1$ et, pour tout k compris entre 1 et r, f_k une fonction dans $\mathcal{L}^{p_k}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   Montrer que $f = \prod_{k=1}^{r} f_k$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\|f\|_p \leq \prod_{k=1}^{r} \|f_k\|_{p_k}$ (inégalité de Hölder généralisée).

– II – Un résultat de densité

On rappelle qu'une fonction en escalier (ou fonction constante par morceaux) sur un segment $[a, b]$ est une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ pour laquelle il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = b$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq n-1)$.

Une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$ est une fonction qui est en escalier sur un segment $[a, b]$ et nulle en dehors de ce segment.

1. Montrer qu'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
2. Montrer qu'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
3. Soit $f = \mathbf{1}_I$, où I est un intervalle borné d'extrémités $a \leq b$.
   Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_p = 0$, le support de chaque fonction f_n étant contenu dans $[a, b]$.
4. Soit f une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$.
   Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_p = 0$, le support de chaque fonction f_n étant contenu dans celui de f.
5. Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
   Pour $p = 1$, vérifier qu'on a alors :
   $$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\, dt$$
6. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et tout réel h, on désigne par $\tau_h f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tau_h f(x) = f(h + x)$.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et à support compact.
      i. Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel $h \in [-1, 1]$, on a $|\tau_h f - f| \leq 2 \|f\|_\infty \mathbf{1}_{[-\alpha, \alpha]}$.
      ii. Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$, on a $\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.

(b) Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a $\lim\limits_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$ (théorème de continuité en moyenne dans $\mathcal{L}^p$).

– III – Inégalité de Hardy

On se donne un réel $p \in \left]1, \infty\right[$ et $q = \dfrac{p}{p-1}$ est l'exposant conjugué de p ($q \in \left]1, \infty\right[$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$).

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

À toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, on associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} \Phi(f)(0) = f(0) \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \ \Phi(f)(x) = \dfrac{F(x)}{x} \end{cases}$$

On se propose de montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, on a $\|\Phi(f)\|_p \leq \dfrac{p}{p-1} \|f\|_p$, ce qui revient à dire que :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} \frac{1}{x^p} \left| \int_0^x f(t)\, dt \right|^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_{\mathbb{R}^{+,*}} |f(x)|^p\, dx$$

(*inégalité de Hardy*).

2. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, la fonction $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, la fonction $\Phi(f)$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ avec $\|\Phi(f)\|_p \leq q \|f\|_p$.
4. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, $\Phi(f)$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ avec $\|\Phi(f)\|_p \leq q \|f\|_p$.
5. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(\Phi(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, la convergence étant uniforme sur tout intervalle $\left[a, +\infty\right[$.
   (b) Montrer que pour tous réels $0 < \varepsilon < R$, la suite $(|\Phi(f_n)|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|\Phi(f)|^p$ sur $[\varepsilon, R]$.
   (c) Montrer que $\Phi(f) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*}, \mathbb{C})$ avec $\|\Phi(f)\|_p \leq q \|f\|_p$.
6. Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \geq 2, \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \ f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{]1,n[}(t)$$

   (a) Montrer que $f_n \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et calculer $\|f_n\|_p$ pour tout entier $n \geq 2$.

(b) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $\Phi(f_n)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et qu'on peut écrire $\|\Phi(f_n)\|_p^p$ sous la forme :

$$\|\Phi(f_n)\|_p^p = q^p (u_n + \ln(n) + v_n)$$

où :

$$u_n = \int_1^n \left(\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x} \right)^p - \frac{1}{x} \right) dx$$

et :

$$v_n = \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} \right)^p$$

(c) Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\|\Phi(f_n)\|_p}{\|f_n\|_p} = \frac{p}{p-1}$$

7. Montrer que :

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}) \\ \|f\|_p > 0}} \frac{\|\Phi(f)\|_p}{\|f\|_p} = \frac{p}{p-1}$$

– IV – Produit de convolution

1. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ où $1 \leq p, q \leq +\infty$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)\, g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que la fonction $f * g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt$ est bornée avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

   (c) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

   (d) Montrer que, pour tout réel h, on a $\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g$, puis que :

$$\|\tau_h(f * g) - f * g\|_\infty \leq \|\tau_h f - f\|_p \|g\|_q$$

   et en déduire que la fonction $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   La fonction $f * g$ est le produit de convolution de f et g.

2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et à support compact.

   (a) Justifier la définition du produit de convolution $f * g$ et montrer que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que si g est de plus de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \geq 1$, la fonction $f * g$ est alors aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$ pour tout k compris entre 1 et n.

   (c) Montrer que si la fonction f est aussi continue à support compact, la fonction $f * g$ est alors continue et à support compact et pour $1 \leq p \leq +\infty$, on a $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

(d) Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors la fonction $f * g$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et on a $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

3. On appelle suite régularisante toute suite de fonctions $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction α_n est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$et il existe un réel $\delta_n > 0$ tel que $\operatorname{supp}(\alpha_n) \subset [-\delta_n, \delta_n]$;
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$;
   - $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha_n(t)\,dt = 1$.

   (a) On se donne une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\operatorname{supp}(\alpha) \subset [-\delta, \delta]$, où $\delta > 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\,dt = 1$.
   On associe à cette fonction la suite de fonctions $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha_n(t) = n\alpha(nt)$$
   Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante.

   (b) Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
      i. Montrer qu'en tout point de continuité x_0 de f, la suite $(f * \alpha_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.
      ii. Dans le cas, où f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer que la suite $(f * \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
      iii. En supposant que toutes les fonctions α_n sont paires, montrer que pour tout réel x, on a :
      $$\lim_{n\to+\infty} f * \alpha_n(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$
      où $f(x^-) = \lim\limits_{t\to x^-} f(t)$ et $f(x^+) = \lim\limits_{t\to x^+} f(t)$.

   (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et à support compact.
   Montrer que pour $1 \leq p \leq +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f * \alpha_n\|_p = 0$.

   (d) Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f * \alpha_n\|_p = 0$.

   (e) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante telle que $\operatorname{supp}(\alpha_n) \subset [0, \delta_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.
   On lui associe la suite régularisante $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \beta_n(t) = \alpha_n(-t)$$
   On se donne une fonction continue par morceaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
      i. Montrer que, pour tout réel x, on a :
      $$\lim_{n\to+\infty} f * \alpha_n(x) = f\left(x^-\right) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f * \beta_n(x) = f\left(x^+\right)$$
      ii. On suppose que f admet un point de discontinuité x_0.
      En désignant par $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite régularisante définie par :
      $$\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_{2n} = \alpha_n \text{ et } \gamma_{2n+1} = \beta_n$$
      montrer que la suite $(f * \gamma_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

4. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \gamma(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} \text{ si } t \in \left]-1,1\right[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   (a) Montrer que γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note $\alpha = \dfrac{1}{I}\gamma$, où $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\,dt$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite régularisante associée ($\alpha_n(t) = n\alpha(nt)$).

   (b) En utilisant une telle suite régularisante, montrer que toute fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact telle que :

$$\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$$