Université Joseph Fourier **Année 2014-2015**
UFR IM^{2}AG **Agrégation interne**

Intégration

Exercice 1. Soit $a < b$ deux réels et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue de signe constant. Montrer : $\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Exercice 2. *Lemme de Gronwall.* Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle quíl existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x \geq 0,\ f(x) \leq k \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 3. Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a, b]$.
Déterminer $\lim_{p\to\infty}(\int_a^b |f(t)|^p dt)^{1/p}$.

Exercice 4. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dt$.
(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
(ii) Montrer que (I_n) décroit, que nI_nI_{n-1} est constant et que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 5. Irrationalité de π. On suppose que $\pi = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soit $f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(p - qx)^n$ et $I_n = \int_0^\pi f_n(x)\sin x dx$.
(i) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
(ii) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $f_n^{(k)}(p/q) \in \mathbb{Z}$ (on remarquera que $f_n(\frac{p}{q} - x) = f_n(x)$).
(iii) En intégrant par parties, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$ et en déduire une contradiction.

Exercice 6. Soit n un entier non nul. Montrer que $I_{n,p} := \int_0^1 x^n(1-x)^p dx = \frac{p!}{(n+1)(n+2)...(n+p)(n+p+1)}$. (On pourra montrer $I_{n,p} = \frac{p}{n+1}I_{n+1,p-1}$.)

Exercice 7.
(i) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $\int_{-1}^1 P(t)^2 dt = -i\int_0^\pi P(e^{it})e^{it}dt$.
(ii) Soient $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ des nombres réels. Montrer :

$$\sum_{0\leq k,l\leq n} \frac{a_k b_l}{k+l+1} \leq \pi \sqrt{\sum_{0\leq i\leq n} a_i^2 \sum_{0\leq j\leq n} b_j^2}.$$

Exercice 8. Montrer que pour toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}(f(1) - f(0)) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(On pourra poser $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, écrire $F(1) - F(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et montrer qu'il existe $\theta_{n,k} \in [k/n, (k+1)/n]$ tel que $F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2n^2} f'(\theta_{n,k})$.)

Exercice 9. Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a,b]$. On pose $I_n(f) = \int_a^b e^{int} f(t)dt$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n(f) = 0$.

Exercice 10. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
(i) A-t-on ($\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge) $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
(ii) Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est uniformément continue et que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge alors f a pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 11.
(i) Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{1}{n} & \text{si } x \in [n^2 - n, n^2 + n] \\ f_n(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers 0. A-t-on : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 0$?
(ii) Soit $f_n = [0,1] \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\begin{cases} f_n(x) &= nx^{n-1} \text{ si } x \in [0,1[\\ f_n(1) &= 0. \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
A-t-on : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 0$?

Exercice 12. Soit la fonction $F : x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$. Etudier F (domaine de définition, dérivabilité,...) et en déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Exercice 13. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$.
(i) Montrer que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer G en fonction de F.
(ii) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 14.
(i) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) = -\arctan(-x)$ et que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
(ii) Déterminer deux réels a et b tels que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(x^2) - ax - b)dx$ converge.

Exercice 15.
(i) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est divergente.

(ii) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

Exercice 16. Soient a et b deux réels. Discuter en fonction de a et b la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^a)}{t^b} dt$.

Exercice 17. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

(i) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
(ii) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
(iii) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0$.

Exercice 18. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))dt$.

(i) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
(ii) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' puis F'' sous forme intégrale.
(iii) Montrer que F est solution de l'équation de Bessel $xF''(x) + F'(x) + xF(x) = 0$. (On pourra calculer la dérivée par rapport à t de $\sin(x\sin(t))$.)

Exercice 19. Soit f une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $A > 0$ tels que :

$$\forall t \geq 0,\ |f(t)| \leq Ae^{-at}.$$

On définit la fonction F par $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.

(i) Montrer que F est dérivable sur $]a, +\infty[$ et exprimer F' sous forme intégrale.
(ii) On suppose que f admet une limite en $+\infty$. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0} xF(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(iii) On suppose que f' admet une limite en $+\infty$. On pose $G(x) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}dt$. Démontrer :

$$G(x) = xF(x) - f(0).$$

Exercice 20. On considère la suite (a_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}.$$

(i) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)dx$ converge.
(ii) Soit $a \geq 0$. Montrer : $\displaystyle\int_0^{a} u_n(x)dx = \frac{a}{n^2 + a^2}$. (On pourra faire une intégration par parties.)
(iii) Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, a]$.
(iv) En déduire :

$$\int_0^a \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Exercice 21.
(i) Démontrer que la fonction $\lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle pour $x \leq 0$, strictement positive pour $x > 0$.
(ii) Démontrer qu'il existe une fonction $\lambda_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positive, non identiquement nulle, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support contenu dans l'intervalle fermé $[0, 1]$.
(iii) Démontrer qu'il existe une fonction $\lambda_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\lambda_3(x) = 0$ pour $x \leq 0$, $\lambda_3(x) = 1$ pour $x \geq 1$. On pourra considérer la fonction définie sur $[0, 1]$ par $(\int_0^x \lambda_2(t)dt)/(\int_0^1 \lambda_2(t)dt)$.
(iv) Soient h et k des nombres réels tels que $0 < h < k$. Démontrer qu'il existe une fonction $\lambda_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs dans $[0, 1]$, dont le support est contenu dans $[-h, h]$, et qui vaut 1 sur $[-k, k]$.
(v) En conclure que l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$ contient les indicatrices d'intervalles ouverts bornés. (On rappelle que pour $k \geq 0$, $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, à support compact.)

Exercice 22. Soit $p > 1$. Pour $f \in L^P([0, +\infty[)$, on note $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
(i) On suppose $f \in \mathcal{C}_c(]0, +\infty[)$. Justifier l'égalité

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx = -p \int_0^{+\infty} |f(x)|^{p-2} f(x) x f'(x) dx.$$

(ii) En déduire l'inégalité de Hardy :

$$||f||_p \leq \frac{p}{p-1} ||f||_p.$$

(iii) Etendre au cas où $f \in L^P([0, +\infty[)$.

Exercice 23. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$, avec $\alpha > 0$. Existe-t-il une valeur de α pour laquelle la fonction et sa transformée de Fourier sont égales ?

Exercice 24.
(i) Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice d'un intervalle.
(ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n la fonction indicatrice de $[-n, n)$ et h la fonction indicatrice de $[-1, 1]$. Calculer explicitement $g_n * h$. Montrer que $g_n * h$ est la transformée de Fourier d'une fonction f_n que l'on déterminera.
(iii) Montrer que $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\lim_{n\to\infty} ||f_n||_1 = +\infty$.
(iv) En déduire que l'application $f \to \hat{f}$ envoie $L^1(\mathbb{R})$ dans un sous-espace propre de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$.