Agrégation Interne

Égalités et inégalités

Exercice 1

1. *On se donne un entier $n \geq 1$ et des réels $x_1, \cdots, x_n$. Montrer que :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Dans quel cas a-t'on égalité ?

2. *En déduire une condition nécessaire et suffisante, sur les réels a et b, pour que l'application $\varphi : (x, y) \mapsto a \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i + b \sum\limits_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i y_j$ définissent un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$.*

Exercice 2 *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}$$

Exercice 3 *On se donne un entier $n \geq 1$ et des réels $x_1, \cdots, x_n$ strictement positifs.*

1. *Montrer que :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2$$

Dans quel cas a-t'on égalité ?

2. *Montrer que :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$$

Exercice 4

1. *Montrer que pour tous réels a, b et λ, on a :*

$$(2\lambda - 1) a^2 - 2\lambda ab = \lambda (a-b)^2 - \lambda b^2 + (\lambda - 1) a^2$$

2. *Soit q la forme quadratique définie sur $E = \mathbb{R}^n$ par :*

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} k x_k x_{k+1}$$

   (a) *Effectuer une réduction de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.*

   (b) *Préciser le rang le noyau et la signature de q.*

3. *On note $(x, y) = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ un vecteur de $H = \mathbb{R}^{2n}$ et Q la forme quadratique définie sur H par :*

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k^2 - 2 x_k y_k \right)$$

   (a) *Effectuer une réduction de Q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.*

   (b) *Préciser le rang le noyau et la signature de Q.*

4. Pour $n \geq 1$ et $x = (x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on définit $y = (y_1, \cdots, y_n)$ par :

$$y_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j$$

(a) Montrer que :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \forall k \in \{2, \cdots, n\}, \ x_k = k y_k - (k-1) y_{k-1} \end{cases}$$

(b) Montrer que :

$$Q(x, y) = -q(y)$$

(c) En déduire :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} 2 x_k y_k$$

puis montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

(d) En déduire que si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que la série $\sum x_n^2$ soit convergente et si $(y_n)_{n\geq 1}$ est la suite des moyennes de Cesàro définie par $y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$ pour tout $n \geq 1$, alors la série $\sum y_n^2$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$.

Exercice 5 *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\left(\int_a^b f(t)\, dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(t)\, dt$$

Dans quel cas a-t'on égalité ?

Exercice 6 *Soit $f \in \mathcal{C}^0\left([a, b], \mathbb{R}_+^*\right)$. Montrer que $\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right) \left(\int_a^b f(t)\, dt \right) \geq (b-a)^2$. Dans quel cas a-t'on égalité ?*

Exercice 7 *Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que :*

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2\, dt$$

Exercice 8 *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ une fonction développable en série entière sur $D(0, R)$ avec $0 < R \leq +\infty$. Montrer que si $|f|$ admet un maximum local en 0, elle est alors constante (principe du maximum).*

Dans un espace préhilbertien E, on a l'égalité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Elle est caractéristique des normes déduites d'un produit scalaire. Précisément, on a le résultat suivant.

Exercice 9 *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé réel. On note :*

$$\mu(E) = \sup_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}$$

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *;*
2. *la norme* $\|\cdot\|$ *dérive d'un produit scalaire sur* E *;*
3. $\mu(E) = 1$ *;*
4. *pour* x, y *fixés dans* E, $\|x+ty\|^2$ *est un trinôme en* t.

Exercice 10 *Si* p, q *sont deux réels strictement positifs tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *montrer que :*

$$\forall u \in \mathbb{R}^{+,*}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{+,*},\ u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$$

Définition 11 *Soit* $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ *une suite finie de points d'un espace vectoriel* E. *On dit que* $x \in E$ *est combinaison linéaire convexe des* x_i $(1 \leq i \leq p)$ *si il existe des réels positifs ou nuls* $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ *tels que :*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \quad x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

Exercice 12 *Si* f *est une fonction convexe définie sur une partie convexe d'un espace vectoriel (normé)* E, *montrer que pour toute combinaison linéaire convexe* $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ *d'éléments de* I, *on a :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Exercice 13 *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe alors pour toute fonction* u *continue sur un intervalle* $[a, b]$ *(avec* $a < b$*), montrer que :*

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \circ u(t)\,dt$$

Pour toute suite finie $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ de réels strictement positifs, on note :

$$H(x) = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}, \quad G(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}, \quad A(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de x.

En notant $y = \left(\frac{1}{x_i}\right)_{1\leq i\leq n}$ on peut remarquer que :

$$H(x) = \frac{1}{A(y)}, \quad G(x) = \frac{1}{G(y)}$$

Avec la concavité de la fonction logarithme on obtient le résultat suivant.

Exercice 14 *Avec les notations qui précèdent, montrer que :*

$$H(x) \leq G(x) \leq A(x)$$

De manière plus générale, on peut définir, pour toute suite finie $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels strictement positifs, toute suite $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels strictement positifs telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et tout réel non nul α, la moyenne pondérée d'ordre α par :

$$M(\alpha, x, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

(les x_i sont pondérés par les λ_i).

En notant $x' = \left(\frac{1}{x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}$, on a pour α non nul :

$$M(-\alpha, x, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{-\alpha} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{1}{x_i} \right)^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{M(\alpha, x', \lambda)} \tag{1}$$

Dans le cas où les x_i sont tous égaux à un même réel $\xi > 0$, on a :

$$M(\alpha, x, \lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \xi \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \xi$$

puisque $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Dans le cas où les λ_i sont tous égaux, on a nécessairement $\lambda_i = \frac{1}{n}$ pour tout i et :

$$M(\alpha, x, \lambda) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Pour $\alpha = 1$ (et les λ_i sont tous égaux), on reconnaît la moyenne arithmétique $A(x)$ et pour $\alpha = -1$, la moyenne harmonique $H(x)$.

La moyenne géométrique correspond au cas limite $\alpha = 0$.

Exercice 15 *Avec les notations qui précèdent, montrer que*

1. *la fonction $\alpha \mapsto M(\alpha, x, \lambda)$, pour x et λ fixés, se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ avec :*

$$M(0, x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}$$

2. *pour x et λ fixés, on a :*

$$\lim_{\alpha \to -\infty} M(\alpha, x, \lambda) = \min_{1 \leq i \leq n} x_i \text{ et } \lim_{\alpha \to +\infty} M(\alpha, x, \lambda) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$$

3. *En supposant les x_i non tous égaux, la fonction $\alpha \mapsto M(\alpha, x, \lambda)$, pour x et λ fixés, est strictement croissante.*