Agrégation interne. 2012/2013 [1]

– I – Polynômes de Hilbert

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle.
$\mathbb{K}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Pour tout entier naturel n :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $\mathbb{K}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ constitué des polynômes de degré au plus égal à n ;
- $\mathcal{B}_n = \left(X^k\right)_{0\leq k\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$;
- $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Hilbert définie par :

$$H_0(X) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$$

On désigne par $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ l'application linéaire définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ u(P)(X) = P(X+1)$$

et par $\Delta = u - Id$ l'opérateur de différence première défini par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Pour tout entier naturel n, on désigne respectivement par u_n et Δ_n les restrictions de u et Δ à $\mathbb{K}_n[X]$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $(H_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$, donner sa matrice A_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n$ et calculer son inverse A_n^{-1}.
3. Montrer que, pour tout couple (i,j) d'entiers tel que $0 \leq i \leq j$, on a :

$$\sum_{k=i}^{j} (-1)^{k-i} \binom{k}{i}\binom{j}{k} = \begin{cases} 0 \text{ si } i < j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

4. Donner une expression simple de $H_k(j)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ est identifié à $\mathbb{Z}\cdot 1$ dans $\mathbb{K}$).
   En déduire que $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer, pour $n \geq 1$, les racines du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k H_k$ et donner une expression de P en fonction du polynôme H_n.
6. Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k$ son écriture dans la base $(H_k)_{0\leq k\leq n}$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

   (a) Montrer que :

$${}^tA_n \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$$

   (b) Montrer que, pour tout entier j compris entre 0 et n, on a :

$$\alpha_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} P(k)$$

   (c) Calculer $\sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} P(k)$ pour $j \geq n+1$.

   (d) Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si, et seulement si, on a $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ pour tout k compris entre 0 et n.
7. Montrer que, pour tout entier naturel n, Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ et qu'il est nilpotent d'ordre n.
8. L'application $\Delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ est-elle nilpotente ?

1. D'après, Centrale PSI 2003, Capes 2002, Agrégation interne 2010

9. Montrer que Δ n'est pas injective et décrire son noyau.
10. Calculer $\Delta(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta^k(H_n)(0)$ pour tous n, k dans $\mathbb{N}$.
11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^k(P)\right)(0)\, H_k$$

Expliciter les coefficients du polynôme X^3 dans la base $(H_k)_{0 \le k \le 3}$.

12. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$.
En utilisant la question précédente, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   - (i) $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$;
   - (ii) les composantes de P dans la base $(H_k)_{0 \le k \le n}$ sont entières ;
   - (iii) $P(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout k compris entre 0 et n ;
   - (iv) il existe $n+1$ entiers consécutifs en lesquels P prend des valeurs entières.
13. Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ si, et seulement si, il est dans $\mathbb{Q}[X]$ (i. e. ses composantes dans la base canonique sont rationnels).
14. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, unique à une constante additive près, tel que $P = \Delta(Q)$.
En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de $\sum\limits_{k=0}^{n} P(k)$ en fonction de Q et de n.
Simplifier la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3$.
15. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + P(n) \end{cases}$$

où P est un polynôme non nul dans $\mathbb{K}[X]$. En désignant par Q le polynôme tel que $P = \Delta(Q)$ et $Q(0) = 0$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + Q(n)$$

Étudier le cas où $P(X) = X^2 + X + 1$.

16. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   - (i) il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $u_j = P(j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$;
   - (ii) il existe un entier $n \in \mathbb{N}$. tel que :

$$\forall j \ge n+1,\ \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} u_k = 0$$

– II – Séries entières complexes. Quelques propriétés

Pour cette partie et la suivante, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Pour tout $R \in]0, +\infty]$ (i. e. R est un réel strictement positif, ou $R = +\infty$), on désigne par :

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

le disque ouvert de centre 0 et de rayon R dans le plan complexe et, pour R réel, par :

$$\overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$$

le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

Pour cette partie, on se donne une série entière complexe $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ et on désigne par f sa somme qui est définie sur $D(0, R)$ par :

$$\forall z \in D(0, R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

1. Justifier la définition, pour tout réel $r \in]0, R[$, du réel :

$$M_r(f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

et montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $M_r(f^k) \leq (M_r(f))^k$.

2. Montrer que pour tout réel $r \in]0, R[$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$$

et :

$$|a_n| \leq \frac{M_r(f)}{r^n}$$

3. On suppose, pour cette question, que $R = +\infty$.
   (a) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, elle est constante (théorème de Liouville).
   (b) En déduire que la série entière $\sum a_n z^n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, sa somme f est une fonction polynomiale.
   (c) Que peut–on dire de f s'il existe une fonction polynomiale P telle que $|f(z)| \leq |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?

4. Montrer que pour tout réel $r \in]0, R[$, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

5. Montrer que si $|f|$ admet un maximum local en 0, elle est alors constante (principe du maximum).

6. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions développables en série entière sur $\mathbb{C}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ f_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n$$

On suppose que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur tout compact de $\mathbb{C}$. Montrer que g est développables en série entière sur $\mathbb{C}$.

7. Montrer qu'une fonction g est développables en série entière sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers g sur tout compact de $\mathbb{C}$.

8. Soient $r \in]0, R[$ et $z_0 \in D(0, r)$.
   (a) Montrer que :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z_0} f(re^{it}) dt$$

   (formule de Cauchy).
   (b) Montrer que :

$$|f(z_0)| \leq \frac{r}{r - |z_0|} M_r(f)$$

   (c) En déduire que $|f(z_0)| \leq M_r(f)$ (on peut utiliser la question précédente pour les fonctions f^k où $k \in \mathbb{N}^*$).

9. Montrer que la fonction $r \mapsto M_r(f)$ est croissante sur $]0, R[$ et que :

$$M_r(f) = \sup_{z \in \overline{D(0,r)}} |f(z)|$$

10. Soient $r \in]0, R[$ et $z_0 \in D(0, r)$.
   (a) Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq p+1} a_n z_0^{n-1-p}$ est convergente. On notera S_p sa somme.
   (b) Calculer $z_0 S_0$ et $S_p - z_0 S_{p+1}$, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que $S_p \underset{p\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{r^{p+1}}\right)$.
   (d) Montrer que le rayon de convergence R_0 de la série $\sum S_p z^p$ est supérieur ou égal à R.

   On désigne par $g_0(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} S_p z^p$ la somme de cette série entière pour $z \in D(0, R_0)$.

(e) Montrer que :

$$\forall z \in D(0,R),\ (z-z_0)\, g_0(z) = f(z) - f(z_0)$$

On a donc ainsi montré que pour tout $z_0 \in D(0,R)$, il existe une fonction g_0 développable en série entière sur $D(0,R)$ telle que $f(z) - f(z_0) = (z-z_0)\, g_0(z)$ pour tout $z \in D(0,R)$.

(f) On suppose que f s'annule en en $p \geq 1$ points deux à deux distincts, $z_1, \cdots, z_p$ de $D(0,R) \setminus \{0\}$.

i. Montrer qu'il existe une fonction g développable en série entière sur $D(0,R)$ telle que :

$$\forall z \in D(0,R),\ f(z) \prod_{j=1}^{p} \left(r^2 - \overline{z_j} \cdot z\right) = g(z) \prod_{j=1}^{p} (z - z_j) \tag{1}$$

($\overline{z_j}$ est le nombre complexe conjugué de z_j).

ii. Calculer $\left|\dfrac{r^2 - \overline{z_j} \cdot z}{z - z_j}\right|$ pour tout $z \in D(0,R) \setminus \{z_1, \cdots, z_p\}$ tel que $|z| = r$.

iii. Montrer que pour tout $z \in D(0,R) \setminus \{z_1, \cdots, z_p\}$ tel que $|z| = r$, on a :

$$|g(z)| = r^p\, |f(z)|$$

iv. Montrer que :

$$M_r(g) = r^p M_r(f)$$

v. Montrer que :

$$|f(0)|\, r^p \leq M_r(f) \left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right|$$

vi. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_j = 0$ pour tout j compris entre 0 et $k-1$.
Montrer que :

$$|a_k|\, r^{p+k} \leq M_r(f) \left|\prod_{j=1}^{p} z_j\right|$$

– III – Un théorème de Pólya

Pour cette partie, on se donne une série entière complexe $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence infini et on désigne par f sa somme qui est définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

On note encore $M_r(f) = \sup\limits_{|z| \leq r} |f(z)|$ pour tout réel $r > 0$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r > n$ un réel.

   (a) Décomposer la fraction rationnelle $R_n(X) = \dfrac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)}$ en éléments simples.

   (b) Montrer que :
   $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n!\, f\left(re^{it}\right)}{(re^{it}-1)\cdots(re^{it}-n)}\, dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

   (c) En déduire que :
   $$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)\right| \leq \frac{n!\, M_r(f)}{(r-1)\cdots(r-n)}$$

2. On suppose, pour cette question, que f est nulle sur $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que $f(k) = 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$) et que $M_r(f) = \underset{r\to+\infty}{o}(2^r)$. Montrer que f est identiquement nulle (on pourra raisonner par l'absurde en utilisant **II.10(f)vi** avec $r = p$, $z_j = j$ pour j compris entre 1 et p, où p est un entier naturel quelconque et s'aider de la formule de Stirling : $p! \underset{p\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi p}\, p^p e^{-p}$).

3. On suppose que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ et que $M_r(f) = \underset{r\to+\infty}{o}\left(\dfrac{2^r}{\sqrt{r}}\right)$.

(a) En choisissant judicieusement r dans la question **III.1** montrer qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) = 0$$

(b) En déduire que f est une fonction polynomiale (théorème de Pólya).

– IV – Un théorème de Harald Bohr

Pour cette partie, on se donne une série entière complexe $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq 1$ et on désigne par f sa somme qui est définie sur $D(0, R)$ par :

$$\forall z \in D(0, R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

On se propose de montrer que si $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$, on a alors :

$$\forall r \in \left[0, \frac{1}{3}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < 1$$

On suppose que $f(0) \in \mathbb{R}^+$ (si $f(0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$, on remplace f par $e^{-i\theta} f$).

1. Montrer que pour tout réel $r \in]0, R[$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left(f\left(re^{it}\right) + \overline{f\left(re^{it}\right)} \right) e^{-int} dt$$

   En déduire que si $\Re(f(z)) > 0$ pour tout $z \in D(0,1)$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq 2a_0$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq 2(1 - a_0)$$

3. En déduire le résultat annoncé.
4. On se propose de montrer ici que le coefficient $\frac{1}{3}$ est optimal. Pour tout réel $\alpha \in]0, 1[$, on désigne par f la fonction définie sur $D\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ par :

$$f_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z}$$

   (a) Montrer que f_α est développable en série entière sur $D\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ et que $f_\alpha(D(0,1)) \subset D(0,1)$.

   (b) Faisant tendre α vers 1 montrer que le coefficient $\frac{1}{3}$ est optimal.