**Agrégation Interne. Le 20/06/2012**

**Groupes et topologie**

## Quelques rappels

Soient $(G, \cdot)$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$.

La relation $\mathcal{R}$ définie sur $G$ par :

$$g_1 \mathcal{R} g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$$

est une relation d'équivalence et pour tout $g \in G$, on note :

$$\overline{g} = gH = \{gh \mid h \in H\}$$

la classe d'équivalence de $g$ modulo $\mathcal{R}$.

L'ensemble $G/H$ de ces classes deux à deux distinctes forme une partition de $G$.

Dans le cas où $G$ est fini d'ordre $n \geq 2$, on a $\operatorname{card}(gH) = \operatorname{card}(H)$ pour tout $g \in G$ et :

$$\operatorname{card}(G) = \operatorname{card}(G/) \operatorname{card}(H)$$

donc le cardinal de $H$ divise celui de $G$ (théorème de Lagrange).

L'ordre d'un élément $g$ de $G$ est l'élément $\theta(g) \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ défini par :

$$\theta(g) = \operatorname{card}(\langle g \rangle)$$

où $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est le sous-groupe de $G$ engendré par $g$.

Si $\theta(g)$ est dans $\mathbb{N}^*$, on dit alors que $g$ est d'ordre fini, sinon on dit qu'il est d'ordre infini.

On a :

$$\begin{aligned}
(\theta(g) = n) &\Leftrightarrow (\langle g \rangle = \{g^r \mid 0 \leq r \leq n-1\}) \\
&\Leftrightarrow \left(k \in \mathbb{Z} \text{ et } g^k = 1 \text{ équivaut à } k \equiv 0 \mod (n)\right) \\
&\Leftrightarrow (n \text{ est le plus petit entier naturel non nul tel que } g^n = 1)
\end{aligned}$$

Soit $X$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Un réel $m$ est une borne inférieure de $X$ si $m$ est un minorant de $X$ et si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid m \leq x \leq m + \varepsilon$$

($m$ est le plus grand des minorants de $X$).

Un réel $M$ est une borne supérieure de $X$ si $M$ est un majorant de $X$ et si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid M - \varepsilon < x \leq M$$

($M$ est le plus petit des majorants de $X$).

Si $X$ admet une borne inférieure [resp. supérieure] cette dernière est unique.

Toute partie non vide minorée [resp. majorée] dans $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure [resp. supérieure].

## – I – Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

On dit qu'un sous-ensemble $X$ de $\mathbb{R}$ est discret si son intersection avec toute partie bornée de $\mathbb{R}$ est finie (éventuellement vide), ce qui revient à dire que pour tous réel $R > 0$, l'ensemble $X \cap [-R, R]$ est fini.

1. Soit $H$ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer que $H$ est discret si, et seulement si, il existe un réel $\alpha$ tel que :
$$H = \mathbb{Z}\alpha = \{p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\}$$
($H$ est monogène).
2. Montrer qu'un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ est fermé.
3. Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont denses ou discrets.
4. Montrer la densité de l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux et de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels dans $\mathbb{R}$ en utilisant la question précédente.
5. Soient $a, b$ deux réels non nuls.
Montrer que le groupe additif engendré par $a$ et $b$ :
$$\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left\{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$
est discret [resp. dense dans $\mathbb{R}$] si, et seulement si, $\dfrac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel].
Pour $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$ rationnel avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on a $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}\dfrac{b}{q} = \mathbb{Z}\dfrac{a}{p}$.
6. Soient $a, b$ deux réels non nuls.
Montrer que le groupe $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ est fermé si, et seulement si, $\dfrac{a}{b}$ est rationnel (pour $\dfrac{a}{b}$ irrationnel, cela nous donne un exemple de situation où la somme de deux fermés n'est pas un fermé).
7. Soient $a, b$ deux réels non nuls.
Montrer que $\dfrac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel] si, et seulement si $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b \neq \{0\}$ [resp. $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b = \{0\}$].
Pour $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$ rationnel avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on a $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}qa = \mathbb{Z}pb$.
8. Soient $a_1, \cdots, a_n$ une suite de $n \geq 2$ réels non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe engendré par les $a_k$ :
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{Z}a_k = \left\{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k \mid (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{Z}^n\right\}$$
soit dense dans $\mathbb{R}$.
9. Soient $a, b$ deux réels non nuls tels que $\dfrac{a}{b}$ soit irrationnel.
On se propose de montrer que l'ensemble :
$$\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b = \{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.
On se donne deux réels $x < y$.
   (a) Justifier l'existence de $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :
$$0 < pa + qb < y - x$$

(b) On suppose que $p \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $k(pa + qb) + nb \in ]x, y[$.

(c) On suppose que $p < 0$. Justifier l'existence de $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $nb - k(pa + qb) \in ]x, y[$.

(d) Conclure.

10. Soit $\theta$ un réel non nul tel que $\dfrac{\pi}{\theta}$ soit irrationnel.

(a) Montrer que les ensembles $\{\cos(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin(n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$, ce qui signifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ [resp. $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$] est $[-1, 1]$.

(b) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\tan(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

11. [1]On se donne une fonction $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ f'(x) > 0$$

et on s'intéresse aux valeurs d'adhérences de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \cos(f(n))$ pour tout $n \geq 1$.

(a) Justifier le fait que $f$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[1, +\infty[$ sur $[f(1), +\infty[$.
Soient $x \in [-1, 1]$ et $t = \arccos(x) \in [0, \pi]$.

(b) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, il existe un entier naturel $\varphi(n)$ tel que :

$$f(\varphi(n)) \leq t + 2n\pi < f(\varphi(n) + 1) \tag{1}$$

(c) Montrer qu'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq n_1}$ soit strictement croissante.

(d) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (t + 2n\pi - f(\varphi(n))) = 0$.

(e) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \left(u_{\varphi(n)}\right) = x$.

(f) En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $[-1, 1]$.
Prenant $f(x) = x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ ou $f(x) = \ln(x)$, on en déduit que que l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $(\cos(n^\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\cos(\ln(n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $[-1, 1]$.

12. Soient $a, b$ deux réels non nuls.
Montrer que le réel $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel si, et seulement si, il existe deux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ p_n a + q_n b \neq 0 \tag{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (p_n a + q_n b) = 0 \tag{3}$$

On en déduit qu'un réel $\theta$ est irrationnel si, et seulement si, il existe deux suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ p_n \theta - q_n \neq 0 \tag{4}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (p_n \theta - q_n) = 0 \tag{5}$$

13. On utilise le résultat précédent pour montrer l'irrationalité de certains réels.

1. Cette question n'est pas tout à fait dans le sujet, mais le résultat est joli

(a) Montrer que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ est irrationnel.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls telle que :

i. pour tous $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ divise $u_{n+1}$ ;

ii. la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est convergente ;

iii. le reste d'ordre $n$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$, est négligeable devant $\frac{1}{u_n}$.

Montrer que, dans ces conditions, le réel $\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ est irrationnel.

(c) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{2^{2^n} - 1}$ est convergente et que sa somme est irrationnelle.

(d) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{2^{2^n} + 1}$ (nombres de Fermat) est convergente et que sa somme est irrationnelle.

## – II – Fonctions périodiques

Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $T \in \mathbb{R}$ est une période de $f$ si $f(x+T) = f(x)$ pour tout réel $x$.

L'ensemble $\mathcal{P}(f)$ de toutes les périodes de $f$ est un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$.

Une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite périodique si $\mathcal{P}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante si, et seulement si, $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$.
2. Soit $G$ un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et $f$ la fonction caractéristique de $G$. Montrer que $\mathcal{P}(f) = G$.
3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, le groupe $\mathcal{P}(f)$ des périodes de $f$ est alors fermé dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si $f$ est une fonction continue, périodique, non constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe alors un unique réel $T > 0$ tel que $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$ ($\mathcal{P}(f)$ est discret et $T$ est la plus petite période strictement positive de $f$).
5. Soient $T_1, T_2$ deux réels non nuls et $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T_1) = f(x+T_2) = f(x)$$
Montrer que si $\frac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, la fonction $f$ est alors constante.
6. Montrer que si $f, g$ sont deux fonctions continues périodiques non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de plus petites périodes respectives $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$ avec $\frac{T_1}{T_2}$ irrationnel, la fonction $f + g$ n'est alors pas périodique.
7. Soit $H$ une partie dense de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel $x$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante [resp. strictement décroissante] qui converge vers $x$.
8. Soient $T_1, T_2$ deux réels non nuls et $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite à gauche [resp. à droite] en un point $a$ et telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T_1) = f(x+T_2) = f(x)$$
Montrer que si $\frac{T_1}{T_2}$ est irrationnel, la fonction $f$ est alors constante.

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique non constante admettant une limite à gauche [resp. à droite] en un point $a$. Montrer que $\mathcal{P}(f)$ est discret (soit $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$ avec $T > 0$).
10. Montrer que si $f, g$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(g) \neq \{0\}$, la fonction $f + g$ est alors périodique.
11. Montrer que si $f$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de plus petite période strictement positive $T$, une primitive $F$ de $f$ est $T$-périodique si, et seulement si, $\int_0^T f(t)\,dt = 0$.
12. Montrer que si $f$ est une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a alors $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(f')$.
13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction pour laquelle il existe une fonction polynomiale $P$ de degré au plus égal à $n \in \mathbb{N}$ et un réel $T > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) + P(x)$$

Montrer qu'il existe une fonction $g$ périodique de période $T$ et une fonction polynomiale $Q$ de degré au plus égal à $n \in \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + xQ(x)$$

## – III – Sous-groupes de $\mathbb{R}^n$

On désigne par $n$ un entier naturel non nul, $E$ l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|$.

Pour tout $a$ dans $E$ et tout réel $R > 0$ on note $B(a, R)$ [resp. $\overline{B}(a, R)$] la boule ouverte [resp. fermée] de centre $a$ et de rayon $R$ dans $E$.

Une partie $X$ de $E$ est dite discrète si son intersection avec toute partie bornée de $E$ est finie (éventuellement vide), ce qui revient à dire que pour tout réel $R > 0$, l'ensemble $X \cap \overline{B}(0, R)$ est fini.

On dit qu'un élément $x$ d'une partie non vide $X$ de $E$ est isolé dans $X$, s'il existe un ouvert $\mathcal{V}$ de $E$ tel que $X \cap \mathcal{V} = \{x\}$.

1. Soit $G$ un sous-groupe additif de $E = \mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $G$ est discret ;
   (b) $0$ est isolé dans $G$ ;
   (c) tous les éléments de $G$ sont isolés dans $G$.
2. Montrer qu'un sous-groupe discret de $E$ est fermé dans $E$.
3. Soit :

$$G = \left\{ \left(p + q\sqrt{2}, q\sqrt{2}\right) \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

   (a) Montrer que est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$.
   (b) On désigne par $\pi_1$ la projection $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$. Que dire du groupe $\pi_1(G)$ ?
4. On se propose ici de montrer que si $G$ est un sous-groupe discret de $E$ non réduit à $\{0\}$, il existe alors un entier $r$ compris entre 1 et $n$ et une famille libre $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ dans $G$ telle que :

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{r} k_i e_i \mid (k_1, \cdots, k_r) \in \mathbb{Z}^r \right\}$$

ce que l'on note :

$$G = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} e_i$$

On se donne un sous-groupe discret $G$ de $E$ non réduit à $\{0\}$ et $r \in \{1, \cdots, n\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel $F$ de $E$ engendré par $G$.

(a) Justifier l'existence d'une famille $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'éléments $G$ formant une base de $F$.

(b) Traiter le cas $r = 1$.

(c) On suppose que $r \in \{2, \cdots, n\}$ et on note :

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i g_i \mid (x_1, \cdots, x_{r-1}, x_r) \in [0, 1[^{r-1} \times ]0, 1] \right\}$$

i. Montrer que $P = K \cap G$ est fini non vide et qu'on peut poser :

$$\alpha_r = \min \left\{ x_r \in ]0, 1] \mid \exists \, (x_1, \cdots, x_{r-1}) \in [0, 1[^{r-1} \ ; \ \sum_{i=1}^{r} x_i g_i \in P \right\}$$

On désigne par $e_r = \sum\limits_{i=1}^{r-1} \alpha_i g_i + \alpha_r g_r$ un élément de $P$ de $r$-ème composante minimale.

ii. Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe un entier $k_r$ tel que $g - k_r e_r \in \operatorname{Vect} \{g_1, \cdots, g_{r-1}\}$.

(d) Montrer qu'il existe une famille libre $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'éléments de $G$ telle que $G = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} \mathbb{Z} e_i$.