Partie I

On se propose dans cette première partie de prouver une forme affaiblie du théorème de Dirichlet, connue sous le nom de "Théorème de Féjer", selon laquelle, si f est une fonction continue et 2π-périodique de **R** dans **C**, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f au sens de Cesáro.

On fixe donc une fonction f continue et 2π-périodique de **R** dans **C**. On rappelle les quelques résultats suivants : si $S_n(f)$ désigne la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f, alors pour tout réel x, on a :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u\ .$$

Pour tout entier non nul n, on posera $\sigma_n(f) = \dfrac{S_0(f) + S_1(f) + \ldots + S_{n-1}(f)}{n}$.

1. Prouver que f est uniformément continue et bornée sur **R**.

2. **a.** Calculer, pour u non nul dans $[-\pi,\pi]$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})u$.

b. En déduire que pour tout réel x, on a :

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(u+x) - f(x)\right)\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u\ .$$

3. On fixe un réel ε strictement positif.

a. Prouver l'existence d'un réel δ élément de $]0,\pi[$ tel que, pour tous réels x et u, on ait :

$$|u| \le \delta \Rightarrow \left|f(u+x) - f(x)\right| \le \varepsilon\ .$$

b. Prouver l'inégalité :

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(f(u+x) - f(x)\right)\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u\right| \le \varepsilon\ .$$

c. Prouver que si M désigne la norme infinie de f, on a :

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\left(f(u+x) - f(x)\right)\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u + \int_{\delta}^{\pi}\left(f(u+x) - f(x)\right)\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\right| \le \frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}\ .$$

d. En déduire que la suite $\left(\sigma_n(f)\right)$ converge uniformément vers f sur **R**.

4. **a.** Prouver que l'on peut écrire, pour tout entier n non nul et tout réel x :

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n})\left[a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right].$$

b. Prouver le théorème de Stone-Weierstrass dans sa version trigonométrique.

c. Prouver que la version trigonométrique du théorème de Stone-Weierstrass entraîne sa version polynomiale usuelle.

Partie II

Le but de cette deuxième partie est d'établir le résultat non trivial selon lequel, si une fonction f possède sur **R** un développement en série trigonométrique, celui-ci est unique (et ce sans aucune hypothèse de régularité sur f !). Les trois lemmes que nous établirons pour ce faire sont parfaitement autonomes, ont un intérêt en soi, et utilisent des raisonnements de nature tout à fait différente.

Lemme 1 : Une fonction f, continue de **R** dans **C**, possédant en tout point de **R** une pseudo-dérivée seconde nulle, est affine sur **R**.

Définissons avant tout la pseudo-dérivée seconde d'une fonction f définie au voisinage d'un réel x_0 : c'est la limite, si elle existe, de $\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$ quand h tend vers zéro. Cette limite est notée $f^{[2]}(x_0)$.

On vérifierait sans aucune difficulté que l'ensemble des fonctions possédant en x_0 une pseudo-dérivée seconde est un espace vectoriel, et que l'application $f \mapsto f^{[2]}(x_0)$ est linéaire.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable en un point x_0 de **R**. Prouver que f possède en x_0 une pseudo-dérivée seconde, et la calculer. Examiner la réciproque.

2. Que dire de la pseudo-dérivée seconde d'une fonction numérique f en un point x_0 réalisant un maximum local de f ?

3. Prouver que pour établir le lemme, il suffit de le prouver pour les fonctions à valeurs réelles.

4. Soit donc f une fonction numérique continue sur **R**, possédant en tout point de **R** une pseudo-dérivée seconde nulle. Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$, et ε un réel strictement positif.

On définit une fonction g sur $[a,b]$ en posant : $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \varepsilon\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$.

a. Prouver que g possède en tout point de $]a,b[$ une pseudo-dérivée seconde, et la calculer.

b. En déduire que pour tout x de $[a,b]$, on a $g(x) \le g(a)$.

c. Faire un travail analogue avec une autre fonction auxiliaire ressemblant beaucoup à g, et en déduire que f est affine sur $[a,b]$.

d. Prouver que f est affine sur **R**.

Lemme 2 : Soient (a_n) et (b_n) deux suites de complexes telles que, pour tout réel x, la suite $\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)$ tende vers zéro. Alors les deux suites (a_n) et (b_n) tendent vers zéro.

Soient donc (a_n) et (b_n) deux suites de complexes satisfaisant aux hypothèses du lemme.

1. Prouver que la suite (a_n) tend vers zéro, et que la suite $\big(b_n\sin(nx)\big)$ tend aussi vers zéro pour tout x.

2. Supposons que la suite (b_n) ne tend pas vers zéro.

a. Prouver l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers (φ_n) telle que pour tout x de **R**, la suite $\big(\sin(\varphi_n x)\big)$ tende vers zéro.

b. Prouver alors l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers (α_n) telle que pour tout x de **R**, la suite $\big(\sin(\alpha_n x)\big)$ tende vers zéro, et vérifiant pour tout n de **N** : $\alpha_{n+1} \ge 5\alpha_n$.

c. Prouver qu'il est possible de choisir des entiers k_n pour que les segments J_n suivants soient emboîtés :

$$J_n = \left[\frac{\pi/4+2k_n\pi}{\alpha_n}, \frac{3\pi/4+2k_n\pi}{\alpha_n}\right]$$

(*indication* : on écrira les inégalités qu'il faut réaliser pour que les J_n soient emboîtés, et on réfléchira à la question existentielle suivante : que doit-on supposer sur deux réels *u* et *v* pour être certain qu'il y a un entier entre les deux ?)

d. Conclure à une impossibilité.

e. Quelle différence profonde existant entre les suites $(\cos nx)$ et $(\sin nx)$ explique que le résultat que l'on désirait prouver soit trivial pour la suite (a_n) et nettement plus délicat pour la suite (b_n) ?

Lemme 3 : Soit φ la fonction continue sur **R** définie par $\varphi(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$. Alors pour toute série de complexes convergente $\sum a_n$, on a $\lim\limits_{h \to 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(nh) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

On posera, pour *h* dans **R***, $S(h) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(nh) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{\sin^2 nh}{n^2 h^2}$. Il est à peu près clair que la série définissant *S* converge toujours, et pour des raisons de parité, nous nous limiterons à son étude sur $\mathbf{R}^{+*}$.

1. Prouver que la fonction dérivée φ' est sommable sur $\mathbf{R}^{+*}$.

2. On pose, pour *n* dans **N***, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Grâce à une transformation d'Abel (?), prouver, pour tout réel ε strictement positif, l'existence d'un entier *N* tel que :

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \forall h \in \mathbf{R}^{+*} \left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n \varphi(nh) \right| \leq \varepsilon \left(2 + \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt \right).$$

3. Prouver le lemme.

Théorème de Cantor : Soit *f* une fonction possédant sur **R** un développement en série trigonométrique. Alors celui-ci est unique.

On posera pour tout réel *x*, $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right]$. Définissons alors une fonction *F* en posant :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right].$$

1. Prouver que *F* est définie, continue sur **R**, et calculer ses coefficients de Fourier.

2. Prouver que *F* possède en tout point une pseudo-dérivée seconde, et la calculer.

3. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout réel *x*. Il s'agit de prouver que tous les coefficients a_n et b_n sont nuls. Le théorème de Cantor découlera alors immédiatement de ce résultat (en écrivant deux développements en série trigonométrique égaux, et en envisageant leur différence…).

a. Prouver l'existence de deux réels *b* et *c* tels que : $\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = a_0 \dfrac{x^2}{2} + bx + c$.

b. Prouver que $a_0 = b = c = 0$, et conclure.

Fin du problème.