Agrégation Interne

Fonctions analytiques réelles

I étant un intervalle réel ouvert non vide, on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est analytique sur I, si elle est développable en série entière au voisinage de tout point x_0 de I, ce qui signifie qu'il existe un réel $r_0 > 0$ tel que $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \subset I$ et une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes tels que :

$$\forall x \in [x_0 - r_0, x_0 + r_0]\,,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

On rappelle qu'une telle fonction est indéfiniment dérivable sur I.

– I – Un théorème de Bernstein

À toute fonction f à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage $]-r, r[$ de 0 avec $r > 0$, on associe les suites de fonctions $(P_{n,f})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R_{n,f})_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $]-r, r[$ par :

$$P_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,\ \ R_{n,f}(x) = f(x) - P_{n,f}(x)$$

1. Donner, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[\,, \mathbb{R})$ et $x \in\,]-r, r[\,$, une expression intégrale de $R_{n,f}(x)$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[\,, \mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in\,]-r, r[\,$. Montrer que :
   (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in\,]0, r[\,$, on a $0 \leq R_{n,f}(x) \leq f(x)$;
   (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{R_{n,f}(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur l'intervalle $]0, r[$;
   (c) f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r.
3. On suppose que $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[\,, \mathbb{R})$ est paire telle que $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in\,]-r, r[\,$. Montrer que :
   (a) pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in\,]0, r[\,$, on a $f^{(2k+1)}(x) \geq 0$;
   (b) f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r.
4. On suppose que $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[\,, \mathbb{R})$ est telle que $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in\,]-r, r[\,$. On associe à cette fonction, la fonction g définie sur $]-r, r[$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$. Montrer que :
   (a) g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[\,$, paire et telle que $g^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in\,]-r, r[$;
   (b) $0 \leq R_{2n-1,f}(x) \leq R_{2n-1,g}(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in\,]-r, r[$;
   (c) f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r.

5. Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(]-r, r[, \mathbb{R})$ telle que $f^{(2k+1)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-r, r[$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence au moins égal à r.
6. Montrer que la fonction tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
7. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur un intervalle ouvert I non vide telle que $f^{(2k)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$ [resp. $f^{(2k+1)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$]. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de tout point de I (théorème de Bernstein).

– II – Un théorème de Borel

On sait qu'une fonction développable en série entière sur un voisinage $]x_0, -\alpha, x_0 + \alpha[$ d'un point x_0 est indéfiniment dérivable sur ce voisinage. On s'intéresse ici à la réciproque de ce résultat.

1. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   (a) $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$;
   (b) $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n(1-inx)}$;
   (c) $h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$;

   sont indéfiniment dérivables et non développables en série entière au voisinage de 0.
2. On se propose de montrer un théorème de Borel qui nous permet de construire des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel x on a, en notant $y = \arctan(x)$:
   $$\arctan^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(y) \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
   En déduire que $\left|\arctan^{(n)}(x)\right| \leq \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}$.
   (b) Pour tout réel $\alpha \geq 0$, on désigne par φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel non nul x, on a $\left|\varphi_\alpha^{(n)}(x)\right| \leq \frac{n!}{|x|^n} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 x^2}}$.
   (c) On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0(x) = a_0$ pour tout réel x et $u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1 + n! a_n^2 x^2}$ pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x.
      i. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on a $|u_n(x)| \leq \frac{|x|^{n-1}}{\sqrt{n!}}$. En déduire que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

ii. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, tout entier $n \geq p+1$ et tout réel x, on a $\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! (n+1)^p$.

iii. En déduire que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$ et $f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k^{(n)}(0) + n! a_n$ pour tout entier $n \geq 2$.

(d) Déduire de ce qui précède que, pour tout suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(0) = b_n$ pour tout entier n (théorème de Borel).

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable et paire.

(a) Justifier l'existence d'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable telle que $\frac{h^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$.

(b) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - h(x^2)$ est telle que $\varphi^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n.

(c) Montrer que la fonction $\theta : x \mapsto \varphi\left(\sqrt{|x|}\right) = f\left(\sqrt{|x|}\right) - h(x)$ est indéfiniment dérivable de série de Taylor en 0 nulle.

(d) Déduire de ce qui précède, l'existence d'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable telle que $f(x) = g(x^2)$ pour tout réel x.

– III – Une caractérisation des fonctions analytiques réelles

1. Soient $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction analytique et x_0 un point de I.

(a) Montrer qu'il existe deux réels positifs α_0 et β_0 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]x_0 - \frac{r_0}{2}, x_0 + \frac{r_0}{2}\right[,\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq n! \alpha_0 \beta_0^n$$

(b) Montrer que pour tout segment K contenu dans I, il existe deux réels positifs α_K et β_K tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in K,\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq n! \alpha_K \beta_K^n \tag{1}$$

(on pourra utiliser le fait que du recouvrement du compact K par les ouverts $\left]x_0 - \frac{r_0}{2}, x_0 + \frac{r_0}{2}\right[$, où x_0 décrit K, on peut extraire un sous-recouvrement fini).

2. Réciproquement, montrer que si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout segment $K \subset I$, il existe α_K et β_K dans $\mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in K,\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq n! \alpha_K \beta_K^n$$

alors f est analytique sur I.

3. Montrer que la somme et le produit de deux fonctions analytiques, les primitives d'une fonction analytique et l'inverse d'une fonction analytique à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ sont analytiques.

4. Montrer que la fonction arctan est analytique sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $t \mapsto \varphi(t) e^t$ soit bornée. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

– IV – Le théorème des zéros isolés

1. Soient $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction analytique et x_0 un point de I. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$;
   (b) il existe un réel $r > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$;
   (c) $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que si f, g sont deux fonctions analytiques sur I qui coïncident au voisinage d'un point x_0 de I, elles sont alors égales.
3. Soient $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle et $x_0 \in I$ un zéro de f. Montrer qu'il existe un entier $m \geq 1$ et une fonction analytique $g : I \to \mathbb{C}$ ne s'annulant pas sur un voisinage de x_0 tels que $f(x) = (x - x_0)^m g(x)$ pour tout $x \in I$.
4. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle. Montrer que l'ensemble des zéros de f est une partie fermée et discrète de I. En particulier pour tout compact K contenu dans I, l'ensemble des zéros dans K de f est fini.