ACADEMIE de GRENOBLE **2007/08**
AGREGATION INTERNE de MATHEMATIQUES

GEOMETRIE

(Monique Decauwert)

Barycentres, coordonnées barycentriques, convexité

On note $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension n.

I Rappels sur les barycentres

Définition: Soient $A_1, \ldots, A_p$, p points de $\mathcal{E}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, p nombres réels, l'application (*Fonction de Leibniz*) [Gottfried Wilhem von Leibniz, Allemagne(1946-1716)]

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ M & \mapsto & \Sigma_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \end{array} \right.$$

est affine et son application linéaire associée $\vec{f}$ vérifie

$$\vec{f}(\overrightarrow{MN}) = f(N) - f(M) = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MN} = (\Sigma_{i=1}^{p} \alpha_i)\overrightarrow{MN}.$$

Si $\Sigma_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$, $\vec{f}$ est bijective, il en va de même pour f. Il existe alors un unique point G tel que $f(G) = \vec{0}$, c'est à dire tel que

$$\Sigma_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

ou encore

$$(\sum_{i=0}^{p} \alpha_i)\overrightarrow{PG} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{PA_i}$$

quel que soit le point P de $\mathcal{E}$. Le point G ainsi défini est dit le *barycentre* des points A_i $1 \leq i \leq p$ affectés des coefficients α_i. Si, ce que l'on peut toujours supposer, $\sum_{i=1}^{p} = 1$, on note

$$G = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i A_i,$$

ceci signifie donc

$$\overrightarrow{PG} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{PA_i}$$

quel que soit le point P de $\mathcal{E}$.
Si $\Sigma_{i=1}^{p} \alpha_i = \vec{0}$, $\vec{f}$ est nulle et f est une application constante, C'est dire que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{PA_i} = \vec{v}$$

quel que soit le point P de $\mathcal{E}$, où $\vec{v}$ est un vecteur constant.

Proposition (Lemme fondamental):
Si $M = \sum_i m_i A_i$, $N = \sum_i n_i A_i$, $L = \mu M + \nu N$, alors
$L = \sum_i (\mu m_i + \nu n_i) A_i$.
A démontrer absolument!

Proposition (Associativité): Soit une famille finie A_{ij} de points affectés des masses $\alpha_{ij}; i = 1 \ldots p,\ j = 1 \ldots q$ telle que $\Sigma_{ij}\alpha_{ij} \neq 0$ et pour tout j $\Sigma_i \alpha_{ij} \neq 0$.
Alors le barycentre G des points A_{ij} affectés des masses α_{ij} est le barycentre des points G_j affectés des masses $\Sigma_i \alpha_{ij}$ où G_j est le barycentre des points $A_{ij},\ i = 1 \ldots p$ affectés des masses α_j $i = 1 \ldots p$.

Proposition: Un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement si il est non vide et stable par passage au barycentre.

Proposition: Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application de $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{F}$ soit affine est qu'elle "conserve" le barycentre, c'est à dire qu'elle vérifie

$$f(bary \begin{bmatrix} A_1 & \ldots & A_p \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \end{bmatrix}) = bary \begin{bmatrix} f(A_1) & \ldots & f(A_p) \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \end{bmatrix}$$

quel que soient $p \in \mathbf{N}^*,\ A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{E},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbf{R}$ tels que $\Sigma_i \alpha_i \neq 0$.

II Coordonnées barycentriques

Définition: On appelle *coordonnées barycentriques* du point M dans le repère affine $(A_1, \ldots, A_n)$ de $\mathcal{E}$ tout $(n+1)-$uplet de nombres réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0$ et $M = bary \begin{bmatrix} A_0 & \ldots & A_n \\ \alpha_0 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}$
Elles sont uniques à multiplication par un scalaire non nul près. On dit qu'elles sont réduites si elles sont normalisées par la condition $\Sigma_i \alpha_i = 1$, elles sont alors uniques.

Remarque: Pour trouver les coordonnées barycentriques du point M dans le repère $A_0, \ldots, A_n$, il suffit d'écrire que les vecteurs $\overrightarrow{A_0M}, \ldots, \overrightarrow{A_nM}$ sont liés.

Exercice 1. Montrer que l'équation d'une droite affine du plan en coordonnées barycentriques est de la forme $ax + by + cz = 0$ où $(a, b, c) \notin \mathbf{R}(1, 1, 1)$.

Attention à ne pas les confondre avec des coordonnées cartésiennes. Il en faut trois et non deux pour repérer un point du plan!

Exercice 2. Soient $\{A,\, B,\, C\}$ un repère affine du plan
$\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $a_1x + b_1y + c_1z = 0$
$\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $a_2x + b_2y + c_2z = 0$
Montrer :
$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ Donner une CNS pour qu'elles soient concourantes.
Si maintenant $\mathcal{D}_3$ est la droite d'équation $a_3x + b_3y + c_3z = 0$ donner une CNS pour que les droites $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2, 3$ soient concourantes ou parallèles.

Proposition: Soit $\{A,\, B,\, C\}$ un repère affine du plan. Les coordonnées barycentriques d'un point M du plan sont $(det(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA_2},)\, det(\overrightarrow{MA_2}, \overrightarrow{MA_0}),\, det(\overrightarrow{MA_0}, \overrightarrow{MA_1}))$.
preuve: On cherche x, y, z tels que $x\overrightarrow{MA_0} + y\overrightarrow{MA_1} + z\overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{0}$, ce qui implique $det(\overrightarrow{MA_0}, x\overrightarrow{MA_0} + y\overrightarrow{MA_1} + z\overrightarrow{MA_2}) = \vec{0}$
où det est le déterminant relativement à une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
Que se passe-t-il si on change de base?

Exercice 3. Montrer que si dans le repère cartésien $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan affinr réel les coordonnées de M sont (x, y) (c'est à dire si $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$), si celles de A_i sont (x_i, y_i) pour $i = 0, 1, 2$ alors les coordonnées barycentriques de M sont
$\left(\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_0 & x & x_2 \\ y_0 & y & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x \\ y_0 & y_1 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$.

Définition(*Aire algébrique*):
On se place dans le plan affine muni d'un repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, L'aire algébrique d'un triangle (A, B, C) est $\mathcal{A}(A, B, C)) := (1/2)det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 4. a) Montrer

$$\mathcal{A}(A, B, C)) = \mathcal{A}(B, C, A)) = \mathcal{A}(C, A, B)) = -\mathcal{A}(B, A, C) = -\mathcal{A}(A, C, B) = -\mathcal{A}(C, B, A).$$

b) Montrer que si $\mathcal{P}$ est muni d'une structure euclidienne et si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$, l'aire algébrique d'un triangle est l'aire usuelle munie d'un signe .

III Quelques résultats classiques

On se place dans le plan affine réel éventuellement muni d'une structure euclidienne .
Soit $(A,\, B,\, C)$ un repère affine (i.e. un vrai triangle);
On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ les angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ mesurés entre 0 et π.

Exercice 5. Montrer que:
a) Le centre de gravité a pour coordonnées barycentriques $(1, 1, 1)$,
b) le centre du cercle circonscrit $(sin2\widehat{A}, sin2\widehat{B}, sin2\widehat{C})$,
c) le centre du cercle inscrit (a, b, c),
d) l'orthocentre $(tan\widehat{A}, tan\widehat{B}, tan\widehat{C})$.

Exercice 6. *La formule de Leibniz*
Montrer que si $G = bary \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{bmatrix}$ alors

$$\Sigma_{i=1}^p \alpha_i MA_i^2 = (\Sigma_{i=1}^p \alpha_i)MG^2 + \Sigma_{i=1}^p \alpha_i GA_i^2$$

et qu'en particulier, si I est le milieu du segment $[AB]$, on a

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + AB^2/2$$

(formule de la médiane).
A titre de rappel, démontrer:

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OM}$$

Exercice 7. Soit $ABCD$ un quadrilatère non aplati d'un plan affine. Montrer qu'il existe des réels (non tous nuls)α, β, γ, δ tels que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ et $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD} = 0$. Par l'étude des signes de de α, β, γ, δ, montrer que, ou bien l'un des points est dans le triangle formé par les autres, ou bien deux côtés ou deux diagonales se coupent.
Ainsi, il existe trois sortes de quadrilatères , nous les dirons croisés, convexes ou rentrants.

Et, moins classique:

Exercice 8. (d'après le Monde du Mardi du 15/10/2007)(affaire de logique)
Soit ABC un triangle, soient B'(resp. C') un point du segment $[AC]$(resp.$[AB]$). Les segments $[BB']$ et $[CC']$ découpent ABC en trois triangles et un quadrilatère. Montrer que trois de ces derniers peuvent avoir une même aire (géométrique) et préciser alors son rapport à l'aire du triangle ABC.

IV Rappels sur les convexes:

Si A et B sont deux points de $\mathcal{E}$.
Le *segment* $[AB]$ est l'ensemble $\{\lambda A + (1-\lambda)B | \lambda \in [0,1]$, ensemble des barycentres à coefficients positifs de A et B).
On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est *convexe* ou *un convexe* si elle est non vide et si pour tout couple (A, B) de points de $\mathcal{C}$, $[AB] \subset \mathcal{C}$.
Un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ est convexe si et seulement si il est stable par passage aux barycentres à coefficients positifs.
L' intersection d'une famille quelconque de convexes est soit vide soit un convexe.
On appelle *enveloppe convexe* d'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ non vide l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ qui contiennent $\mathcal{P}$. C'est la plus petite partie convexe de $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{P}$ (au sens de l'inclusion) . C'est aussi l'ensemble des barycentres de systèmes de points de $\mathcal{P}$ affectés de coefficients positifs.

Exercice 9. Déterminer les convexes d'une droite affine.

Exercice 10. Déterminer l'enveloppe convexe de deux points, trois points.

Exercice 11. Montrer que l'image d'un convexe une application affine est convexe et qu'il en va de même pour l'image réciproque.

Exercice 12. Montrer que l'adhérence d'une partie convexe est convexe.

Exercice 13. Montrer qu'une partie convexe est connexe.

V Demi-espaces:

Un hyperplan d'un espace affine $\mathcal{E}$ admet une équation de la forme $\varphi(M) = 0$ où φ est une forme affine non constante et si $\psi(M) = 0$ est une autre équation de $\mathcal{H}$ avec ψ forme affine, alors $\psi = \lambda\varphi$ pour un scalaire λ non nul.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{E}$ d'équation $\varphi(M) = 0$ où φ est

une forme affine. Soit $\mathcal{H}_+ = \{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) \geq 0\}$, $\mathcal{H}^*{}_+ = \{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) > 0\}$, $\mathcal{H}_- = \{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) \leq 0\}$ et $\mathcal{H}^*{}_- = \{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) < 0\}$.

Exercice 14. Montrer que $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-, \mathcal{H}^*{}_+$ et $\mathcal{H}^*{}_-$ sont convexes, que les ensembles $\{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-\}$, $\{\mathcal{H}^*{}_+, \mathcal{H}^*{}_-\}$ sont indépendants de l'équation affine choisie.
On dit que $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$ (resp. $\mathcal{H}^*{}_+, \mathcal{H}^*{}_-$) sont les demi-espaces fermés (resp. ouverts) définis par $\mathcal{H}$.
Justifier cette terminologie du point de vue topologique.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{E}$. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$ par $M\mathcal{R}N \Longleftrightarrow [M,N] \cap \mathcal{H} \neq \{0\}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer ses classes.

Exercice 15. le théorème de Carathéodory [Constantin Carathéodory, Grèce(1873-1950)]
a) Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$.
Montrer que $Conv(\mathcal{A})$ est formé de l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de k points de $\mathcal{A}$ où $k \leq n+1$.
b) En déduire que l'enveloppe convexe d'une partie compacte est compacte
Indication: Considérer $\mathcal{K} = \{(t_i)_{i=1 \ldots n+1} | t_1 + \ldots + t_{n+1} = 1\}$ et l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{K} \times \mathcal{E}^{n+1} & \longrightarrow \quad \mathcal{E} \\ (t_1, \ldots, t_{n+1}, A_0, \ldots, A_n) & \mapsto \quad \Sigma_{i=0}^{n} t_i A_i \end{cases}$$

c) Montrer, à l'aide d'un contre-exemple que l'enveloppe convexe d'un fermée n'est pas toujours fermée.

Exercice 16. Le théorème de Gauss-Lucas [Carl Friedrich Gauss, Allemagne(1777-1855) et Edouard Lucas, France(1842-1891)].
Soient $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré $n \geq 2$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines.
Montrer que toute racine β du polynôme dérivé P' est dans $Conv(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Exercice 17. Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe fermée non vide de $\mathcal{E}$ et soit $A \in \mathcal{E}$.
a) Montrer qu'il existe un unique point $Y \in \mathcal{C}$ tel que $d(A,Y) = inf_{X \in \mathcal{C}} d(A,X)$
b) Montrer que $\mathcal{C}$ est inclus dans le demi-espace fermé par $\mathcal{H}$ ne contenant pas A, $\mathcal{H}$ désignant l'hyperplan orthogonal à (AY) en Y.
c) En déduire que $\mathcal{C}$ est l'intersection de tous les demi-espaces qui le contiennent.

Exercice 18. Montrer que pour toute partie convexe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$, les conditions suivantes sont équivalentes:
(i) l'intérieur de $\mathcal{C}$ est non vide
(ii) le sous-espace affine engendré par $\mathcal{C}$ est $\mathcal{E}$.

Exercice 19. Points extrémaux.
Soit $\mathcal{C}$ une partie *convexe fermée* de $\mathcal{E}$.
Un point $A \in \mathcal{C}$ est dit extrémal si "$X, Y \in \mathcal{C}, A \in [X,Y] \Rightarrow A = X$ ou $A = Y$"
On notera $Ext((\mathcal{C}$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{C}$.
a) Montrer que $Ext(\mathcal{C})$ est contenu dans la frontière de $\mathcal{C}$.
b) Montrer "A extrémal $\Leftrightarrow \mathcal{C} \setminus \{A\}$ convexe."
c) Soit $\mathcal{F}$ une partie finie de $\mathcal{E}$. Montrer que $Conv(\mathcal{F}) = Conv(Ext(Conv(\mathcal{F}))$.