Fonctions de plusieurs variables

Agrégation interne

25 Novembre 2015

Table des matières

1 Exercices

1.1 Normes

Exercice 1 – Soient N_1, N_2 deux normes sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
- On note $B_1 = \{x \in E / N_1(x) \leqslant 1\}$ et $B_2 = \{x \in E / N_2(x) \leqslant 1\}$.
  Montrer
  $$B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2$$
- Même question avec les boules unités ouvertes.

Exercice 2 – Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $N\colon \mathbf{K}^n \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$N(x_1, \ldots, x_n) = a_1 |x_1| + \cdots + a_n |x_n|$$

À quelle condition sur les $a_1, \ldots, a_n$, l'application N définit-elle une norme sur $\mathbf{K}^n$?

Exercice 3 – Montrer que $E = \{a + b\sqrt{2}\ ;\ (a,b) \in \mathbf{Q}^2\}$ est un $\mathbf{Q}$ espace vectoriel de dimension 2. On définit N_1 sur E par $N_1(a + b\sqrt{2}) = |a| + |b|$ et N_2 par $N_2(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}|$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ? Expliquez.

Exercice 4 – Montrer que l'application $N : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$N(x_1, x_2) = \sup_{t \in [0,1]} |x_1 + t x_2|$$

est une norme sur $\mathbf{R}^2$.

Représenter la boule unité fermée pour cette norme et comparer celle-ci à $\| \, . \, \|_\infty$.

Exercice 5 – On définit une application sur $M_n(\mathbf{R})$ en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur $M_n(\mathbf{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.

Exercice 6 – Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$.

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a \neq b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a, b) \in [0, 1]$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 7 – Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

Exercice 8 – Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$.

1. Si N est une norme sur E, montrer que F est ou bien une partie fermée, ou bien une partie dense de (E, N).
2. Donner un exemple de norme pour laquelle F est fermé, et un exemple pour laquelle F est dense.

1.2 Applications linéaires

Exercice 9 – Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur [0,1] et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $N_1(f) \leq N_2(f)$. En déduire que l'application identité de (E, N_2) vers (E, N_1) est continue.
2. A l'aide de la fonction $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identité de (E, N_1) vers (E, N_2) n'est pas continue.

Exercice 10 – Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?
2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto AP$, où A est un élément fixé de E, est continue sur E ?

Exercice 11 – Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier la terminologie : "ϕ est un endomorphisme de E."
2. Démontrer que ϕ est continue.
3. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
4. On pose $|||\phi||| = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $|||\phi|||$.

Exercice 12 – Soit $E = \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E, D n'est jamais une application linéaire continue de (E,N) dans (E,N).

Exercice 13 – Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit $\mathscr{C}(I)$ de la norme $\|.\|_\infty$. On dit qu'une forme linéaire $u : \mathscr{C}(I) \to \mathbb{R}$ est positive si $u(f) \geq 0$ pour tout $f \in C(I)$ vérifiant $f(x) \geq 0$ si $x \in I$.

1. Démontrer que, pour toute forme linéaire $u : \mathscr{C}(I) \to \mathbb{R}$ positive, $|u(f)| \leq u(|f|)$.
2. Soit e la fonction définie par $e(x) = 1$ pour tout $x \in I$. Déduire de la question précédente que toute forme linéaire positive est continue, et calculer $\|u\|$ en fonction de $u(e)$.

Exercice 14 – On munit $M_n(\mathbf{R})$ d'une norme d'algèbre (cf. exercice 5)

1. Soient $A \in M_n(\mathbf{R})$ et f l'application de $M_n(\mathbf{R})$ dans $M_n(\mathbf{R})$ $X \mapsto (AX)^2$. Déterminer une application linéaire F_X (nécessairement continue) telle que pour tout $Y \in M_n(\mathbf{R})$,

$$f(Y) - f(X) = F_X(Y - X) + o(Y - X).$$

2. Même question pour $g : M \mapsto M^2$ de $M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$.
3. Montrer que $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ est ouvert dans $M_n(\mathbf{R})$. Soit $u\ :\ \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ l'application

$$M \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R}) \mapsto M^{-1}.$$

Déterminer une application linéaire (continue) F_I de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $M_n(\mathbf{R})$ telle que

$$u(I + h) - u(I) = F_I(h) + o(H).$$

1.3 Différentiabilité

Exercice 15 – Montrer que l'application

$$P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

définie sur $E = \mathbf{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice 16 – a) Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $f(M) = M^2$.

1. Justifier que f est différentiable et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définie par $f(M) = \mathrm{tr}(M^3)$.
3. Justifier que f est différentiable et calculer la différentielle de f en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 17 – Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E.

1. Montrer que l'application $f : x \in E \mapsto (u(x) \mid x)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point.
2. Montrer que l'application
$$F : x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \frac{(u(x) \mid x)}{(x \mid x)}$$
est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et que sa différentielle vérifie
$$DF(a) = 0 \iff a \text{ est vecteur propre de } u$$

Exercice 18 – Calculer les dérivées partielles de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \min(x, y^2)$.

Exercice 19 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Justifier que f est continue en $(0,0)$ et étudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

Exercice 20 – Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \varphi(y/x)$. Montrer que f vérifie la relation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Exercice 21 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(u,v) = f(u^2+v^2, uv)$$

a) Justifier que g est différentiable.
b) Exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 22 – Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable.
On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbf{R}$ si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

– On suppose f homogène de degré α. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

– Établir la réciproque.

Exercice 23 – Soit $E = \mathbb{R}^n$, et soit $\phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ définie par $\phi(u) = u \circ u$. Démontrer que ϕ est de classe C^1.

Exercice 24 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2.$$

Démontrer que f est constante.

Exercice 25 – Montrer qu'une norme n'est jamais différentiable en 0.

Exercice 26 –

1. Expliquer pourquoi l'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est différentiable.
2. Calculer la différentielle de det en I_n puis en toute matrice M inversible.
3. En introduisant la comatrice de M, exprimer la différentielle de det en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 27 – Soit $X = \mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme uniforme et soit f une application de $\mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On note F l'application $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ de X dans X. Montrer que pour chaque $\varphi \in X$, $DF(\varphi)$ est l'opérateur linéaire de multiplication par $f' \circ \varphi$ dans X :

$$DF(\varphi) \cdot (h) = \big(f' \circ \varphi\big) \cdot h\ ,$$

et que DF est continue.

Exercice 28 –

1. Que peut-on dire de la différentiabilité de l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x_1,x_2) = \|x\|_\infty = \max(|x_1|,|x_2|)$?
2. Généraliser ceci à $f : \mathscr{F} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \|x\|_\infty$, avec $\mathscr{F} = \mathbf{R}^n$ ou $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites de limite nulle.

Exercice 29 – Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application $x = (x_1,x_2) \mapsto \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Est-ce qu'elle est différentiable ?

Considérons maintenant l^1 l'espace des suites réelles muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$.

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur l^1 il existe une suite bornée $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ telle que
$$L(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j\ .$$
2. Montrer que la norme $\|.\|_1 : l^1 \to \mathbf{R}$ n'est différentiable en aucun point de l^1 (raisonner par l'absurde en utilisant (1.)).

Exercice 30 – On considère l'application $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $F(x,y) = (\cos x - \sin y,\ \sin x - \cos y)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois

1. Montrer que $||DF(x,y)|| \leq \sqrt{2}$ pour tout (x,y).
2. En déduire que la suite récurrente définie par x_0, y_0 et pour $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$

   converge pour tout (x_0, y_0). Donnez l'équation que vérifie sa limite ?

Exercice 31 – $E = \mathbf{R}^n$ est muni d'une norme $\| \ \|$. Soit u une application différentiable d'un intervalle ouvert non vide I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ telle que $u(t_0) = 0$ ($t_0 \in I$). On suppose qu'il existe une constante k telle que

$$\forall t \in I,\ \|u'(t)\| \leq k\|u(t)\|.$$

Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que la restriction de u à $[t_0 - h, t_0 + h]$ soit identiquement nulle.

En déduire que u est nulle sur I.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbf{R}^n$ k-lipschitzienne par rapport à la seconde variable :

$$\forall (t,y) \in U \forall (t,z) \in U,\ \|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k\|y - z\|.$$

Montrer que le problème de Cauchy $y' = f(t,y)$ et $y(t_0)y_0$ admet au plus une solution définie sur un intervalle I contenant t_0.

1.4 Dérivées itérées et formule de Taylor

Exercice 32 – Autour d'un lemme de Hadamard. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $f^{(k)}(0) = 0$.
2. Il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(x) = x^n g(x)$.

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$, il existe une fonction g continue telle que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + x^n g(x).$$

Soit $f\ :\ [-1,1] \to \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. On cherche à déterminer le comportement de

$$I_n = \int_{-1}^{1} f(x) e^{-nx^2}\, dx$$

quand n tend vers $+\infty$.

1. Étudier I_n lorsque $f = 1$ (poser $t = x\sqrt{n}$)
2. On suppose que $f(x) = xg(x)$ avec g de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que $I_n = O(\frac{1}{n})$.
3. En écrivant $f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 h(x)$, montrer que

$$I_n = f(0)\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mêmes questions pour
$$J_n = \int_{-1}^{1} f(x) e^{-inx^2}\,dx.$$

Soit U un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ contenant 0 et $f \in \mathscr{C}^\infty(U,\mathbf{R})$. Montrer que si $f(0)=0$ et $Df_0 = 0$, alors il existe des fonctions $g_{i,j}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que
$$f(x) = \sum_1^n x_i x_j g_{i,j}(x).$$

Exercice 33 – Déterminer les extrema (locaux et, éventuellement, globaux) de $f\ : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

Même question pour $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$.

Exercice 34 – On considère dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique et sa structure euclidienne, le plan $\Sigma = \{(x,y,x+y)\ ;\ (x,y) \in \mathbf{R}^2\}$ et soit $x = (1,0,0)$.

Déterminer le point $p \in \Sigma$ qui réalise la distance $d(\Sigma, x)$.

Exercice 35 – On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
b) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

Exercice 36 – Soit φ une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$. On définit sur $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle la fonction f par
$$f(x) = \varphi(\|x\|).$$

Calculer df et $d^2 f$. Calculer Δf en fonction des dérivées de φ.

Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ telles que $\Delta f = 0$ et qui ne dépendent que de $\|x\|$.

Exercice 37 – Soit $E = \mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et soit f une application de E dans E de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que pour tout $x \in E$, la différentielle de f en x est une isométrie.

1. Pour $(h,k) \in E^2$, on note φ la fonction définie par
$$x \mapsto \varphi(x) = \langle df_x(h), df_x(k) \rangle = < h,k > .$$
Montrer que φ est dfférentiable et calculer sa différentielle.
2. On définit $u : E^3 \to \mathbf{R}$ par
$$u(h,k,l) = \langle df_x(h), d^2 f_x(k,l) \rangle.$$
Montrer que u est symétrique par rapport aux deux dernières variables et antisymétrique par rapport aux deux premières.
3. En déduire que u est nulle. Puis que $d^2 f_x = 0$.
4. Conclure.

1.5 Inversion locale

Exercice 38 – Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivable en tout point de $\mathbf{R}$ et telle que, pour tout x de $\mathbf{R}$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R})$ et que f^{-1} est différentiable en tout point de $f(\mathbf{R})$.

Soit f définie par $f(x) = x + x^2 \sin\frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Montrer que $f'(0)$ existe et est $\neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

Exercice 39 –

1. Montrer que l'application $\varphi : (r,\theta) \to (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur le plan privé de la demi-droite $\mathbf{R}^-$. Si $f(x,y) = g(r,\theta)$ donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et celles de g.
2. Soit U le plan privé de l'origine, et $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

   Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.
3. Soit g l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U \subset \mathbf{R}^2$ tel que g soit un difféomorphisme de U sur $g(U)$.
4. Soit h l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $(x,y) \to (e^x\cos y, e^x\sin y)$.

   Montrer que h est de classe C^1 dans $\mathbf{R}^2$; que $h'(x,y)$ est un élément de Isom($\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2$) pour tout (x,y) de $\mathbf{R}^2$; mais que h n'est pas un homéomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $h(\mathbf{R}^2)$.

1.6 Fonctions implicites

Exercice 40 – Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que l'équation $y^{2n+1} + y - x = 0$ définit implicitement une fonction φ sur $\mathbf{R}$ telle que : $(\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2)$, $[y^{2n+1} + y - x = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)]$.

Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et calculer $\int_0^2 \varphi(t)\, dt$.

Exercice 41 –

1. Montrer que l'équation : $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$.
2. Donner le DL de φ en 0 à l'ordre 3.

Exercice 42 – On considère $E = M_n(\mathbf{R})$, $F = GL(n,\mathbf{R})$ et l'application Ψ de $F \times E$ dans E définie par $\Psi(A,B) = AB - I$. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que $\varphi : A \in F \to A^{-1}$ est différentiable en tout point de F et retrouver sa différentielle.

Leçons concernées

227 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Exemples.

228 Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles.

265 Inversion locale, difféomorphismes. Applications

266 Applications linéaires continues, normes associées. Exemples

415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

418 Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables

431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles

439 Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.

452 Exemples d'applications du thèorème des fonctions implicites