Exercices

Exercice 1. *Montrer, sans utiliser la fonction exponentielle ni le théorème de Cauchy-Lipschitz, qu'une solution réelle définie sur* $\mathbf{R}$ *et non identiquement nulle de l'équation différentielle* $y' = y$ *ne s'annule jamais.*

Exercice 2. *On considère l'équation différentielle* $x^2y' = y \quad (E)$.

1. *Trouver les solutions de* (E) *sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$.
2. *Trouver toutes les solutions de* (E) *sur* $\mathbf{R}$.

Exercice 3. *Chercher toutes les solutions de* $(x+1)y" - y' - xy = e^{-x}$*(remarquer que* $x \mapsto e^x$ *est solution de l'équation homogène.*

Exercice 4. *Intégrer les équations différentielles suivantes :*

1. $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$.
2. $y'' - 2y' + 2y = xe^x$
3. $y'' + y = cotgx$.
4. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ *(poser* $u = e^x$*).*

Exercice 5. *Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.*

1. $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$.
2. $xy'' + 2y' - xy = 0$.

Exercice 6. *On considère l'équation différentielle* $z" + a(x)z' + b(x)z = 0$ *à coefficients continus sur un intervalle* I.

1. *Montrer qu'en posant* $z(x) = u(x)y(x)$ *on peut se ramener à étudier une équation différentielle* (E) *de la forme* $y" + py = 0$ *où* p *est une fonction continue sur* I
2. *On suppose que* p *est continue sur* $\mathbf{R}$ *à valeurs dans* $]0, +\infty[$. *Montrer que toute solution de* $y" + py = 0$ *s'annule au moins une fois sur* $\mathbf{R}$.
3. *Soit* z *une solution de l'équation différentielle* $z'' - pz = 0$ non identiquement nulle. *Montrer que* z *s'annule au plus une fois.*
4. *Soient* f, g *deux solutions indépendantes de* (E). *Si* α *et* β *(avec* $\alpha < \beta$*) sont deux zéros consécutifs de* f *(cf. exercice 6), alors il existe* $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *tel que* $g(\gamma) = 0$.
5. *On suppose désormais que l'on a deux équations du second ordre*

$$(E_1): \ y'' + p(t)y = 0$$

$$(E_2): \ y'' + q(t)y = 0$$

   où $p \leq q$ *sont deux fonctions continues sur un intervalle* I. *On considère* f *(resp.* g*) une solution non-identiquement nulle de* (E_1) *(resp. de* E_2*). Montrer que si* α *et* β *sont deux zéros consécutifs de* f, *alors il existe* $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *tel que* $g(\gamma) = 0$.
6. **Comparaison à un cas classique** *Soit l'équation* $y'' + q(t)y = 0$, *et* f *une solution non-identiquement nulle de cette équation. Montrer que*
   - *si* $q(t) \leq M^2$, *alors deux zéros consécutifs de* f *sont distants d'au moins* π/M *;*
   - *si* $q(t) \geq M^2$, *alors dans tout intervalle* I *de longueur* π/M, f *admet au moins un zéro dans* I.

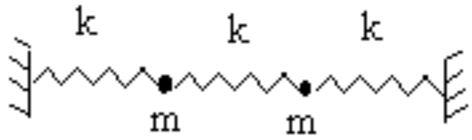

FIGURE 1 – Ressorts couplés.

Exercice 7. *Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. On suppose que $f(x)+f'(x)\to 0$ quand $x\to+\infty$. Montrer que $f(x)\to 0$ quand $x\to+\infty$.*

Exercice 8. *On considère le système de trois ressorts de raideur k et deux masses suivant La loi fondamentale de la mécanique montre que si y_1 et y_2 désignent les élongations des deux premiers ressorts on a*

$$\begin{aligned} -my_1\text{''}-ky_1-k(y_1-y_2) &= 0 \qquad (1)\\ k(y_1-y_2)-my_2\text{''}-ky_2 &= 0. \qquad (2)\end{aligned}$$

1. *Écrire ce système d'équations différentielle sous forme d'un sytème différentiel d'ordre 1.*
2. *Déterminer les valeurs propres de la matrice 4×4 associée dans le cas où $k=1$ et $m=1$.*
3. *On se donne pour condition initiale $y_1(0)=\alpha$, $y_1'(0)=0$. $y_2(0)=0$ et $y_2'(0)=0$. Étudier le mouvement.*
4. *On impose maintenant un mouvement sinusoïdal à l'extrémité précédemment fixe du « premier »ressort. Étudier le mouvement.*

Exercice 9. *Traiter le cas où la fonction a est constante et le second membre b est de la forme $b(x)=P(x)e^{\alpha x}+Q(x)e^{\beta x}$, les fonctions P,Q étant polynomiales et α,β étant des constantes complexes distinctes (ou b est une somme de $p\geq 2$ fonctions de la forme $P(x)e^{\alpha x}$).*

Exercice 10. *Résoudre, dans le cas réel, l'équation différentielle $y'+2y=b$, où b est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :*

$$b(x)=\begin{cases} 1-|x| \;\; si \;\; |x|\leq 1\\ 0 \; si \;\; |x|>1\end{cases}$$

Exercice 11. *On se donne deux scalaires a,b et on s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sur $\mathbf{R}$:*

$$y''=ay'+by \qquad (3)$$

Résoudre cette équation différentielle en se ramenant à une équation différentielle d'ordre 1.

Exercice 12. *On se fixe un point $x_0\in I$. Montrer, dans le cas réel, que les tangentes aux courbes intégrales de (**??**) en x_0 sont parallèles ou concourantes.*

Exercice 13. [Préambule] *Soient* $a_1, \dots, a_n : I \to \mathbf{R}$ *des fonctions continues. Montrer que toute solution non-nulle de l'équation* $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$ *a ses zéros isolés. (Si* $t_0 \in I$ *et* $y(t_0) = 0$*, utiliser une formule de Taylor en* t_0*)*

Exercice 14. *On considère l'équation différentielle* $z" + a(x)z' + b(x)z = 0$ *à coefficients continus sur un intervalle* I*.*

1. *Montrer qu'en posant* $z(x) = u(x)y(x)$ *on peut se ramener à étudier une équation différentielle* (E) *de la forme* $y" + py = 0$ *où* p *est une fonction continue sur* I
2. *On suppose que* p *est continue sur* $\mathbf{R}$ *à valeurs dans* $]0, +\infty[$*. Montrer que toute solution de* $y" + py = 0$ *s'annule au moins une fois sur* $\mathbf{R}$*.*
   Soit z *une solution de l'équation différentielle* $z'' - pz = 0$ non identiquement nulle. *Montrer que* z *s'annule au plus une fois.*
3. *Soient* f, g *deux solutions indépendantes de* (E)*. Si* α *et* β *(avec* $\alpha < \beta$*) sont deux zéros consécutifs de* f *(cf. exercice 6), alors il existe* $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *tel que* $g(\gamma) = 0$*.*
4. *On suppose désormais que l'on a deux équations du second ordre*
   $$(E_1) : \; y'' + p(t)y = 0$$
   $$(E_2) : \; y'' + q(t)y = 0$$
   où $p \leq q$ *sont deux fonctions continues sur un intervalle* I*. On considère* f *(resp.* g*) une solution non-identiquement nulle de* (E_1) *(resp. de* E_2*). Montrer que si* α *et* β *sont deux zéros consécutifs de* f*, alors il existe* $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *tel que* $g(\gamma) = 0$*.*
5. **Comparaison à un cas classique** *Soit l'équation* $y'' + q(t)y = 0$*, et* f *une solution non-identiquement nulle de cette équation. Montrer que*
   – *si* $q(t) \leq M^2$*, alors deux zéros consécutifs de* f *sont distants d'au moins* π/M *;*
   – *si* $q(t) \geq M^2$*, alors dans tout intervalle* I *de longueur* π/M*,* f *admet au moins un zéro dans* I*.*

Exercice 15. *Soit* p *une fonctions continue et intégrable sur* $\mathbf{R}^+$*. Montrer que l'"équation différentielle* $y" + p(x)y = 0$ *admet des solutions non bornées. (Raisonner par l'absurde en utilisant le Wronskien).*