Dénombrement

Préparation à l'agrégation interne

Année 17/18

Exercice 1. Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de couples (A, B) formés de parties de E telles que $A \subset B$?
Quel est le nombre de couples (A, B) formés de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$?

Exercice 2. Soit E un ensemble à n éléments.
L'ensemble des sous ensembles de E ayant k éléments est noté $\mathcal{P}_k(E)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et X l'ensemble des k-uplets d'éléments de E ne comportant aucun élément identique ie l'ensemble des arrangements de k éléments de E sans répétition. Soit f l'application de X dans $\mathcal{P}_k(E)$ définie par :

$$f((x_1, \cdots, x_k)) = \{x_1, \cdots, x_k\}$$

En utilisant le principe de division, déterminer le cardinal de $\mathcal{P}_k(E)$.

Exercice 3. Formule du crible ou d'inclusion-exclusion Soit E un ensemble. Si A est une partie de E, la *fonction indicatrice* de A est la fonction $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}$ valant 1 sur A et 0 sur A^c.
Montrer les propriétés :
a) Si E est fini, $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) = |A|$.
b) $\mathbb{1}_E = 1$ (cte) ; $\mathbb{1}_\emptyset = 0$ (cte).
c)$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$.
d) Si $A \subset B$ alors $\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$.
e)Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de E on a $\mathbb{1}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n} = \mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_n}$.
f) Dans le cas général on a $\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}$.
(Indication : On utilisera c) et e) et le développement de $(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$).
g) De a) en déduire, si E est fini, la formule de Poincaré :

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Exercice 4. Une inégalité Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de E on a $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \leq |A_1| + \cdots + |A_n|$.

Exercice 5. Quel le cardinal de $\{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{N}^k / 1 \leq x_1 < \cdots < x_k \leq n\}$ où $k \leq n$?

Exercice 6. On note S_n^k le nombre d'applications *surjectives* d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble $F = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ à k éléments.
a) Soient pour $i = 1, \ldots, k$ les ensembles d'applications $A_i = \{f : E \to F | y_i \notin f(E)\}$. Calculer $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$ grâce à la formule de Poincaré.
b) En déduire la formule

$$S_n^k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} l^n$$

Exercice 7. Montrer que $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
Que représente ce nombre ?

Exercice 8. Montrer que $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
(On dénombrera de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments d'un ensemble comportant n boules rouges et n boules noires. On parle de preuve par double dénombrement).
Plus géneralement, montrer que pour tout $l \leq m + n$,

$$\binom{n+m}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k}$$

On fait la convention que $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

Exercice 9. Que vaut $\displaystyle\sum_{\substack{(n_1, \cdots, n_k) \in \mathbb{N}^n \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1 \ \cdots \ n_k}$?

Un problème d'occupation

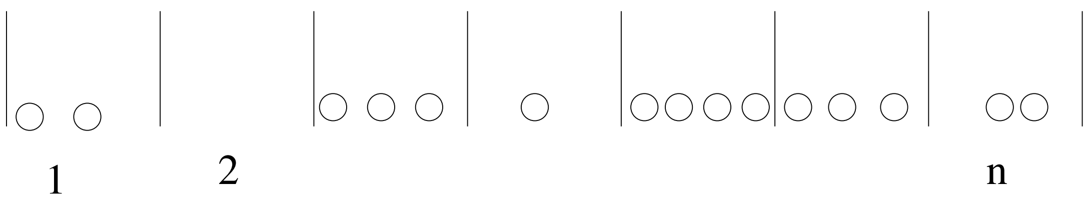
On dispose de n boites numérotées de 1 à n et de k balles indiscernables. On range les balles dans les boites et on se demande quelle est le nombre de façons possibles de le faire.
Notons pour $1 \leq i \leq n$, a_i le nombre de balles dans la boite i. On cherche donc le cardinal de $\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n / \ a_1 + \cdots + a_n = k\}$.

Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n / \ a_1 + \cdots + a_n = k\}| = \binom{n+k-1}{k}$$

Preuve : *Représentons un élément de l'ensemble précédent de la façon suivante :*



On a sur cet exemple $n = 7$ et $k = 15$.
Ainsi une répartition des k balles dans les n boites correspond à un unique mot de k "ronds" et $n - 1$ barres. (On enlève la cloison la plus à droite et la cloison la plus à gauche.)
Réciproquement un tel mot correspond à une répartition des k balles dans les n boites.
Par exemple le mot OOOO|O||OOO|OO|OO|OOO correspond à la solution (4,1,0,3,2,2,3).
Un tel mot comporte $n + k - 1$ lettres. Une fois qu'on a choisi l'emplacement des k ronds, le mot est déterminé. Il y a donc $\displaystyle\binom{n+k-1}{k}$ solutions.

Exercice 10. Une autre démonstration pour le problème d'occupation

Soient n et k des entiers naturels. On note G_n^k le nombre de n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ d'entiers naturels tels que $x_1 + \cdots + x_n = k$.
a) Déterminer G_n^0, G_n^1 et G_n^2 en fonction de n et G_2^k en fonction de k.
b) Démontrer que $G_{n+1}^{k+1} = G_{n+1}^k + G_n^{k+1}$. On pourra classer les $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + \cdots + x_{n+1} = k+1$ suivant que $x_1 = 0$ ou non.
c) En déduire que

$$G_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

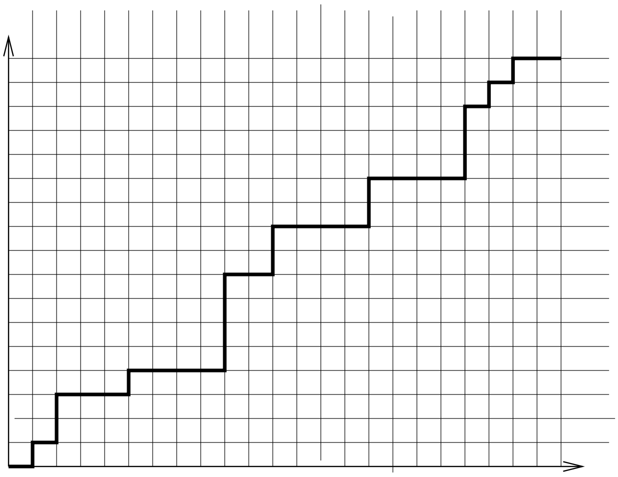
Exercice 11. Encore une autre démonstration pour le problème d'occupation
Notons $\mathcal{G}_n^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 + \cdots + x_n = k\}$.
Notons $\mathcal{H}_n^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = k\}$.
Notons $\mathcal{U}_n^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 < x_2 < \cdots < x_n = k+n-1\}$.
Montrer que les applications suivantes sont bijectives.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{H}_n^k \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + \cdots + x_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{U}_n^k \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_2 + 1, \cdots, x_n + n - 1) \end{array}$$

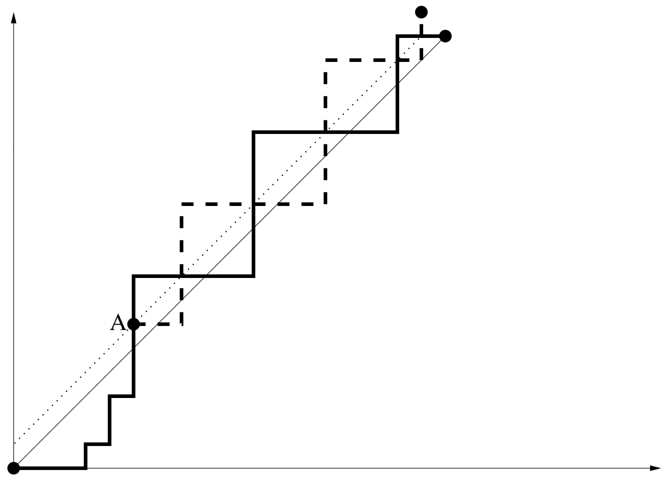
En déduire le résultat.

Exercice 12. Chemins et nombre de Catalan
On considère $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et le réseau passant par les points de coordonnées entidères .
On imagine une personne se déplaçant sur ce réseau seulement dans les directions Nord ou Est, c'est à dire que si la personne est au point de coordonnées (x, y), elle va soit en $(x+1, y)$ soit en $(x, y+1)$.



Voici un exemple de chemin de $(0, 0)$ à $(23, 17)$.
Quel est le nombre de chemins pour aller de $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ à $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$?
On peut voir aussi cette représentation comme la modélisation de l'expérience suivante :
On jette une pièce de monnaie $p+q$ fois. A chaque lancer, on fait un déplacement horizontal si on obtient un pile et un déplacement vertical sinon.
Quel est le nombre de chemins pour aller de $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ à $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ où $\mathbf{0} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{p}$ et $\mathbf{0} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{q}$?
Quel est le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, n) qui reste en dessous de la diagonale ?

Supposons dans l'interprétation précédente que je gagne 1€ chaque fois que la pièce tombe sur pile et perde 1€ chaque fois qu'elle tombe sur face. La réponse à la question me donne le nombre de possibilités telles que partant avec 0€, ma fortune reste toujours positive.
Pour calculer ce nombre, on va d'abord utiliser le principe de soustraction. Ce nombre est égal au nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) moins le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) qui traversent la diagonale c'est à dire qui touche la droite d'équation $y = x + 1$.
Le premier est connu, il faut donc calculer le second. Représentons un tel chemin :



On considère le premier point où on a touché la droite d'équation $y = x + 1$. Soit A.
Ensuite on prend le symétrique du chemin qui va de A à (n,n) par rapport à la droite d'équation $y = x+1$. On obtient le chemin en pointillé. C'est donc un chemin qui va de $(0,0)$ à $(n-1,n+1)$.
Le reste de la trajectoire de $(0,0)$ à A est inchangé.
Grâce à cette symétrie, on a donc associé à notre chemin de $(0,0)$ à (n,n) qui touche la droite d'équation $y = x + 1$, un chemin de $(0,0)$ à $(n-1,n+1)$.
En déduire que le nombre cherché est :

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ce nombre est appelé nombre de Catalan. Cette astuce de comptage fut trouvée par Désiré André en 1887 et est appelée principe de symétrie.