403 : exemples d'études de suites définies par une relation de récurrence

F. Dupré

Exercice 1

On donne u_0 dans **R**, et l'on pose, tant que c'est possible, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur u_0 pour que la suite (u_n) soit entièrement définie.

b. Cette condition étant remplie, étudier la suite (u_n).

On pose alors $v_n = u_{n+1}^a - u_n^a$. Déterminer une valeur de a pour laquelle la suite (v_n) possède une limite finie non nulle, et en déduire un équivalent de u_n.

Étude classique d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ en un point de dérivée 1, problème de l'initialisation, obtention d'un équivalent par application du théorème de Cesàro.

Exercice 2

On donne deux réels strictement positifs u_0 et u_1, et on construit par récurrence une suite en posant, pour tout entier n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\ .$$

a. Déterminer les seules limites possibles de la suite (u_n) et prouver que l'une peut être exclue.

b. On pose $\Delta_n = \left|u_n - L\right|$ où L est la seule limite possible de la suite (u_n). Prouver l'existence d'un réel k tel que $0 < k < 1/2$, et vérifiant pour tout n : $\Delta_{n+2} \le k\left(\Delta_{n+1} + \Delta_n\right)$.

c. On considère une suite (δ_n) définie par $\delta_0 = \Delta_0$, $\delta_1 = \Delta_1$, et $\forall n,\ \delta_{n+2} = k(\delta_{n+1} + \delta_n)$.

Etudier la limite de la suite (δ_n), et conclure.

Récurrence non linéaire à deux termes.

Exercice 3

Soit λ un réel positif, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{\lambda}{1+u_n^2}$.

a. Quelles propriétés possède la suite (u_n) indépendamment de la valeur du paramètre λ ?

b. Étudier cette suite dans les trois cas suivants :

i. $\lambda = 5/8$;

ii. $\lambda = 2$;

iii. $\lambda = 10$.

Étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ dépendant d'un paramètre influant sur la nature du point fixe.

Exercice 4

Trouver la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{11}{2},\ u_1 = \frac{61}{11},\ \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 111 - \frac{1130}{u_{n+1}} + \frac{3000}{u_n u_{n+1}}\ .$$

Quelle limite une calculatrice suggère-t-elle pour la suite (u_n) ? Pourquoi ?

Postulat de la forme du terme général de la suite, récurrences linéaires à trois termes, effet des calculs approchés sur ordinateur.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note u_n le nombre de parenthésages envisageables pour calculer un produit de $n+1$ termes avec une loi non associative. On posera conventionnellement $u_0 = 1$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Établir la formule de récurrence $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

c. On fait momentanément l'hypothèse que la série entière $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence non nul. Prouver que sa somme est solution d'une certaine équation du second degré.

c. On envisage (pourquoi ?) la fonction g définie sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ par $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = ???$

Prouver que g est développable en série entière sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$, et expliciter ce développement (que l'on notera formellement $\sum a_n x^n$).

d. Prouver que la suite (a_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n), puis en déduire que l'on a : $u_n = a_n \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Un problème de dénombrement naturel mène à une formule de récurrence inhabituelle. Emploi d'une stratégie adaptée à la formule de récurrence, obtention d'une formule explicite pour les termes de la suite, intervention des séries entières.

Exercice 6

On étudie ici un algorithme itératif permettant d'inverser les matrices dites "à diagonale dominante".

1. **a.** Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice carrée complexe d'ordre *n*, telle que pour tout entier *i* plus petit que *n*, on ait $\left|m_{i,i}\right| > \sum_{j \neq i} \left|m_{i,j}\right|$ (une telle matrice sera dite à diagonale dominante). Prouver que *M* est inversible.

b. Soit $N = (n_{i,j})$ une matrice carrée complexe d'ordre *n*. Prouver que toute valeur propre complexe de *N* est dans la réunion des disques de centre $n_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} \left|n_{i,j}\right|$.

On fixe dans la suite une matrice $A = (a_{i,j})$ à diagonale dominante.

2. On pose $A = D + G$ où *D* est une matrice diagonale et *G* une matrice de diagonale nulle.

a. Vérifier que *A* et *D* sont inversibles, et que l'équation $AX = B$ est équivalente à $X = A'X + B'$, où l'on a posé $A' = -D^{-1}G$ et $B' = D^{-1}B$.

b. Prouver que le module de toutes les valeurs propres de A' est strictement plus petit que 1.

c. Soit *L* l'unique solution du système $AX = B$. On définit une suite (X_p) en choisissant une matrice colonne X_0 quelconque et en posant, pour tout entier *k* : $X_{p+1} = A'X_p + B'$.

En étudiant la suite $(X_p - L)$, montrer que la suite (X_p) converge vers *L*.

Un algorithme itératif de résolution approchée de systèmes linéaires.