1. Rappels

1.1. **Espaces probabilisés.** Soit Ω un ensemble non vide. Une *tribu* sur Ω est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω contenant $\emptyset$, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable (on dit aussi un espace *mesurable*).

Exemples 1.1. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est évidemment une tribu sur Ω.
$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est la tribu *grossière*.

Définition 1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
(2) Pour toute *suite* (A_k) d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints on a $\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = \sum \mathbb{P}(A_i)$.

Il résulte des deux premières propriétés que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. La seconde entraîne en particulier que si $(A_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup A_i\right) = \sum_1^n \mathbb{P}(A_i).$$

On dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un *espace probabilisé* . Les éléments de $\mathcal{A}$ sont aussi appelés *évènements* .

On vérifie sans peine les propriétés suivantes :

(1) Si $A \subset B$ sont des évènemenst alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. (Écrire $B = A \cup (B \setminus A)$)
(2) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
(3) Si A et B sont des évènements on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

On dit que deux évènements A et B sont incompatibles si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

Proposition 1.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si (A_n) est une suite croissante (pour tout entier n, $A_n \subset A_{n+1}$) d'évènements, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_1^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup A_n\right).$$

Si B_k est une suite décroissante d'évènements,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_k B_k\right) = \lim_j \mathbb{P}\left(B_j\right).$$

Démonstration. On définit une suite C_n par $C_0 = A_0$ et, pour tout entier n positif, $C_n = A_n \cap A_{n-1}^c$. Ces évènements sont deux à deux disjoints de réunion $\bigcup_1^{+\infty} A_k$. Il en résulte que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap C_k\right) = \sum \mathbb{P}\left(C_k\right).$$

De plus, notant $A = \bigcap A_n$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A_n\right) + \sum_{k\geq n+1} \mathbb{P}\left(C_k\right),$$

de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\mathbb{P}\left(A\right) - \mathbb{P}\left(A_n\right)\right| = 0.$$

La seconde assertion se démontre par passage au complémentaire. □

Définition 1.2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (A_i) une famille d'éléments de $\mathcal{A}$. On dit que les évènements A_i sont indépendants si pour toute partie finie J de I,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(A_j\right).$$

2. Variables aléatoires

Définition 2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ pour tout interalle I de $\mathbb{R}$ est appelée *variable aléatoire.*

Proposition 2.1. *Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.*

$$\mathcal{F} = \{B \subset \mathbb{R}\,;X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$ et l'application

$$\mathbb{P}_X : B \in \mathcal{F} \mapsto \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right)$$

est une probabilité sur $\mathcal{F}$ appelée loi *de X.*

2.1. **Variables aléatoires discrètes.** Si X est une application de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si Ω est au plus dénombrable, pour que X soit une variable aléatoire , il suffit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(x)$ appartienne à $\mathcal{A}$ (*cf* **??**). On dit alors que X est une *variable aléatoire discrète.*

Exemples 2.1. Si Ω est un ensemble fini, $X(\Omega)$ est fini ; on peut donc écrire $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et supposer que $x_1 < x_2 \cdots < x_n$.

Si B est une partie de $\mathbb{R}$, la loi de probabilité de X est définie par

$$P_X(B) = \sum_{x_i \in B} \mathbb{P}\left(\{X = x_i\}\right).$$

Elle est entièrement définie par les réels $p_i = \mathbb{P}\left(\{X = x_i\}\right)$. Par exemple :

Définition 2.2. On dit qu'une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *suit une loi de Bernoulli de paramètre* $p \in [0, 1]$ si

(1) $X(\Omega) = \{0, 1\}$

(2) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et donc $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Ce type de variable aléatoire modélise, par exemple, le lancer d'une pièce (1 pour pile, 0 pour face). On note $X \sim \mathcal{B}(1, p)$.

Si on lance n pièces simultanément, l'univers est $\Omega_1 = \Omega^n$ muni de la tribu produit et de la probabilité produit Soit Y est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès (*i.e.* la nombre de pièces qui donnent « pile ». Il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ n-uplets ayant exactement k composantes égales à 1. Si $(a_1, \cdots, a_n)$ en est un, sa probabilité est égale à $p^k(1 - p)^{n-k}$. La loi de Y est donc définie par

$$\mathbb{P}(Y = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1 - p)^k.$$

La formule du binôme montre que c'est bien une loi de probabilité. On dit que Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Définition 2.3. Si Ω est un ensemble fini de cardinal n, On dit q'une application X de Ω dans $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ suit une loi *uniforme* si pour tout i, $\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$.

Définition 2.4. Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des variable aléatoire . On dit que ces variables aléatoires sont indépendantes si, pour toute partie finie $J \subset \mathbb{N}$ et pour toute famille $(B_i)_{i \in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, les évènements $((X_i \in B_i)_{i \in J}$ sont indépendants.

Exemple 2.1. **[Loi géométrique]** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(1, p)$ avec $p \in]0, 1[$. On note Z la variable aléatoire $Z = \inf\{k\,; X_k = 1\}$ [1] : autrement dit, Z donne l'instant du premier succès lors d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes. Puisque les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\mathbb{P}\left(Z = k\right) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_{k-1} = 0)\, \mathbb{P}(X_k = 1) = (1 - p)^{k-1}p.$$

Ceci définit bien une loi de probabilité puisque $\sum (1 - p)^{k-1}p = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$.

Exemple 2.2. On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout entier k on a $\mathbb{P}\left(X = k\right) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Le développement en série de $e^{-\lambda}$ montre que ceci définit bien une loi de probabilité.

---

1. Z est une variable aléatoire puisque si $x \notin \mathbb{N}*$ on a $Z^{-1}(x) = \emptyset \in \mathcal{A}$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Z^{-1}(n) = \bigcap_{1}^{n-1} (X_i = 0) \cap (X_k = 1).$$

2.1.1. *Espérance.*

Définition 2.5. Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X admet une espérance si la famille $X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\})$ est *sommable*. L'espérance de X est alors le réel

$$\mathbb{E}\,(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Remarque 2.1. Si X est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, pour que X admette une espérance, il faut et il suffit que la série $\sum x_i p_i$ soit absolument convergente.

Par regroupement de termes on démontre alors la propriété fondamentale suivante :

Proposition 2.2. [Théorème du transfert] *Soit X une variable aléatoire discrète. Si X admet une espérance, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x_i\in X(\Omega)} x_i\,\mathbb{P}\,(X = x_i)\,.$$

L'espérance de X *ne dépend donc que de la loi de X.*

On note $L^1\left((\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})\right)$ –ou simplement L^1 si aucune confusion n'est à craindre– l'ensemble des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une espérance.

Proposition 2.3. *L^1 est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et l'espérance est une forme linéaire sur L^1.*

(1) *$X \in L^1$ si et seulement si $|X| \in L^1$ et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.*
(2) *L'espérance est une forme linéaire positive sur L^1.*
(3) *Toute variable aléatoire bornée appartient à L^1.*
(4) *Si Ω est fini, toutes les variables aléatoires appartiennent à L^1.*

Définition 2.6. Soit X une variable aléatoire réelle et $n > 0$ un entier . On dit que X admet un moment d'ordre n si X^n admet une espérance.

Définition 2.7. Soit X une variable aléatoire réelle. Si X admet un moment d'ordre 2, alors $(X - \mathbb{E}(X))$ admet un moment d'ordre 2 et

$$Var(X) = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\,.$$

Dans le cas des variable aléatoire discrètes on a donc, avec les notations précédentes et en posant $\bar{x} = \mathbb{E}(X)$,

$$Var(X) = \sum (x_i - \bar{x})^2 p_i$$

Théorème 2.1. *Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ^2. pour tout réel $\alpha > 0$ on a*

$$\mathbb{P}\left(|X - m| \geq \alpha\right) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

Théorème 2.2. [Loi faible des grands nombres] *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire* indépendantes *ayant même espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et même variance $Var(X_1)$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \to 0.$$

2.2. **Probabilité conditionnelle.** Soient A et B deux évènements avec $\mathbb{P}(B) > 0$. La *probabilité conditionnelle* de A sachant B est le réel

$$P_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition 2.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un évènement de probabilité strictement positive. L'application*

$$\mathbb{P}_B\ : A \in \mathcal{A} \mapsto \mathbb{P}_B(A)$$

définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2.2.1. *Fonction génératrice.*

Définition 2.8. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La *fonction génératrice de X* est la fonction $g_X\,:\,[0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_X(s) = \sum \prod (X = n) s^n.$$

3. Exercices

Exercice 3.1 Montrer que toute intersection de tribus sur ‰ est une tribu sur Ω. En déduire que pour toute famille $\mathcal{C}$ de parties de Ω il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. C'est *la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$.

Exercice 3.2 Modéliser un jeu de pile ou face s'arrêtant la première fois qu'on obtient pile (on suppose les lancers indépendants et que la probibilité d'obtenir pile à chaque lancer). Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir pile ?

Exercice 3.3 On joue deux fois à pile ou face avec une pièce non nécessairement équilibrée. Les résultats « obtenir pile au premier lancer »et « obtenir deux fois le même résulta »sont-ils indépendants ? (On discutera suivant la valeur de la probabilité p d'obtenir pile).

Exercice 3.4 On vous propose le jeu suivant : vous lancez une pièce ; si vous obtenez pile, le jeu s'arrête et vous gagnez 2€ ; sinon vous rejouez et si vous obtenez pile, le jeu s"arrête et vous gagnez 4€ ; sinon vous continuez jusqu'à ce que vous ayez obtenu pile pour la première fois ; si c'est au n-ième lancer, vous gagnez 2^n€et le jeu s'arrête. Combien êtes-vous prêt à payer pour participer à un tel jeu ?

Exercice 3.5 On considère une urne contenant $N = N_1 + N_2$ boule, N_1 étant rouges et N_2 blanches. On tire $n \leq N$ boules (on utilise le modèle équiprobable). Déterminer, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ la probabilité p_k d'obtenir k boules blanches.

Déterminer la limite de cette probabilité lorsque $N_1, N_2 \to +\infty$ avec $N_1/N_2 = p$ (on pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$).

Exercice 3.6 Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (entier) du segment $[0, N]$. Si à l'instant n sa position est u_n, à l'instant $n+1$ on a $u_{n+1} = u_n + 1$ avec une probabilité p et u_{n-1} avec une probabilité $1-p$. Le processus se termine lorsque $u_n = 0$ ou $u_n = N$.

Soit p_a la probabilité pour que, partant de a, le processus se termine en 0.

(1) Calculer p_0 et p_N.

(2) On suppose $0 < a < N$. Montrer que $p_a = pp_{a+1} + (1-p)p_{a-1}$.

(3) En déduire p_a.

(4) On note q_a la probabilité pour que, partant de a, le processus se termine au point N. Calculer $p_a + q_a$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3.7 Soit n un entier supposé strictement supérieur à 1. On munit $\{1, ..., n\}$ de la probabilité uniforme. Pour tout entier $m \leq n$, on note A_m l'événement $\{x \in \Omega\ ;\ m \text{ divise } x\}$ On note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin, on note $p_1, ..., p_r$ les diviseurs premiers de n.

(1) Exprimer B en fonction des A_{p_k}.

(2) Pour tout $m \leq n$ qui divise n, calculer la probabilité de A_m.

(3) Montrer que les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

(4) En déduire la probabilité de B.

(5) Application : on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $k \leq n$ premiers avec n. Démontrer que $\varphi(n) = n\prod\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

Exercice 3.8 Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Déterminer la loi de $Y = \max\{X_1, X_2\}$ ainsi que la loi de $Z = \min\{X_1, X_2\}$.

Exercice 3.9 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de Bernoulli définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes de paramètre $p \in]0, 1[$. On note Z_1 la variable aléatoire donnant le rang du premier succès.

(1) Déterminer la loi de Z_1, son espérance et sa variance.

(2) On note Z_2 la variable aléatoire donnant le rang du second succès. Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

(3) Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$, on note Z_n le rang du n-ième succès et $A_n = Z_n - Z_{n-1}$. Montrer que pour $n \geq 2$ les variables $A_1, \cdots, A_n$ sont indépendantes et suivent une même loi que l'on déterminera.

Exercice 3.10

(1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

(b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.

(c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

(2) Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

(a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X.

(b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.

(c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.

(d) En déduire que $\lim_{N \to +\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 3.11 On suppose que le nombre X d'œufs pondus par une tortue au cours d'une ponte suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque œuf arrive à éclosion (indépendamment les uns des autres) avec une probabilité p. On note X le nombre de bebés tortues issus d'une ponte. Déterminer la loi de X. On note Y le nombre d'œufs qui n'arrivent pas à éclosion, déterminer la loi de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 3.12 Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant

- une loi $\mathcal{B}(1, p)$.
- une loi $\mathcal{B}(n, p)$.
- une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 3.13 Déterminer la fonction génératrice g_S d'une variable aléatoire S suivant la loi uniforme sur $\{2, 3, \cdots 12\}$. Montrer que g_S est un polynôme et déterminer ses racines réelles en précisant leur ordre de multiplicité. b) Montrer qu'il est impossible de piper deux dés, de manière éventuellement différente, de façon à ce que la somme des points obtenus en lançant ces deux dés suive la loi uniforme sur $\{2, \cdots, 12\}$.