

Agregation Interne de Mathématiques

Intégration

2011-2012

I .

1) Montrer que : $\sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e.n}$

2) $f \in \mathcal{C}'([0, 1]; \mathbb{R})$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} (f(\frac{2k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(1) - f(0))$

3) Calculer :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=n+1}^{2n} (k^{\frac{1}{k}}) \right)$

II .

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit bornée. On pose $M = \sup_{t \in [a, b]} (|f'(t)|)$.

On suppose que $f(a) = f(b)$. Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} . M$$

Etudier le cas d'égalité.

III .

soit $a < b$ et $E = \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}_+^*)$. Déterminer $\inf_{f \in E} \left(\left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \right) \right)$.

IV .

Soit $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ strictement croissante et surjective, et soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose que $\forall x \in [0, 1] : \int_0^1 [\min(x, g(x))] \cdot f(t) dt = 0$.

Montrer que f est identiquement nulle.

V .

$$0 < a < b$$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$

b) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$

VI .

$$f : x \rightarrow \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \text{ et } g : x \rightarrow \frac{dt}{t \ln(t)}$$

a) Définition et dérivabilité de la fonction f .

b) En déduire que $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \ln(2)$.

VII .

1) a) Montrer que la fonction $t \rightarrow \ln(\sin(t))$ est intégrable sur $]0, \pi[$, et la fonction

$$t \rightarrow \ln(\cos(t)) \text{ est intégrable sur }]0, \frac{\pi}{2}[.$$

b) Montrer que $\int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$.

c) En déduire que $\int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt = -\pi \ln(2)$

2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : \prod_{k=1}^{n-1} (x^2 - 2 \cos(\frac{k\pi}{n}) \cdot x + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}$

b) En déduire que : $\prod_{k=1}^{n-1} (\sin(\frac{k\pi}{n})) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

c) En déduire que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -\pi \cdot \frac{\ln(2)}{2}$

VIII .

- 1) a) Montrer que $(x^n - 1)^2 = \prod_{k=1}^n (x^2 - 2 \cos(\frac{2k\pi}{n}) \cdot x + 1)$
 - b) En déduire que $\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2 \cos(\theta) \cdot x + 1) d\theta = \begin{cases} 4\pi \ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$
 - c) En déduire que $\int_0^\pi \ln(x^2 - 2 \cos(\theta) \cdot x + 1) d\theta = \begin{cases} 2\pi \ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$
 - 2) Justifier et calculer $\int_0^\pi \ln(2 - 2 \cos(\theta)) d\theta$ et $\int_0^\pi \ln(2 + 2 \cos(\theta)) d\theta$
- (On pourra utiliser le résultat de l'exo. 7).

IX .

$f \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$. calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f(t^n) dt \right)$

X .

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$
 - a) Montrer que si $n \geq 2$, alors $nI_n = (n-1)I_{n-2}$
 - b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$
 - c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - d) En déduire que $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
- 2) a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} \cdot I_{2n+1})$.
- b) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = ??$

XI .

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 n \ln(1 + t^n) dt \right)$

(On pourra faire le chg. de variable $x = t^n$) (Rappel : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

(Réponse = $\frac{\pi^2}{12}$)

XII .

1) Soit $a, b > 0$

Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{(a-1)}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$

2) Calculer :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n}$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n}$

XIII .

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} x^{\frac{-1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx \right)$

XIV .

$f : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt.$

Définition, dérivabilité et calcul de $f(x)$.

XV .

$$f : x \rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1) Définition, dérivabilité et calcul de $f'(x)$.

2) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

XVI .

$$f : x \rightarrow \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} \cdot t^x dt$$

Définition, dérivabilité et calcul de $f(x)$.

XVII .

1) a) Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$

b) La fonction $t \rightarrow \frac{\sin(t)}{t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) soit $f : x \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$

a) Déterminer la domaine de définition D de f .

b) Montrer que f est continue sur D .

c) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

d) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

XVIII .

1) Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$

2) a) Montrer que $\forall x > 0 : \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{t}\right) dt = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt = \frac{\pi^2}{4}$.

XIX .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$$

- a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
- c) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^*$: $x.f'(x) - f(x)$.
- d) Exprimer f à l'aide de fonction usuelle.

XX .

$$f : x \rightarrow \int_0^\pi \ln(x^2 - 2 \cos(\theta).x + 1) d\theta$$

- 1) Déterminer la domaine de définition de f .
- 2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} : f'(x) = 4. \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)t^2 + x - 1)^2(1+t^2)} dt$
c) En déduire que : $f(x) = \begin{cases} 2\pi \ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$
d) Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} et calculer $\int_0^\pi \ln(2 - 2 \cos(\theta))d\theta$ et $\int_0^\pi \ln(2 + 2 \cos(\theta))d\theta$
Indication : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \cos(\theta).x + 1 \geq \sin^2(\theta)$ et utiliser le théorème de convergence dominée.
- 3) a) Déterminer le developpement en série entière de la fonction : $g : x \rightarrow \ln(x^2 - 2 \cos(\theta).x + 1)$.
 $\theta \in]0, \pi[$.
b) En déduire que $\forall x \in]-1, 1[: f(x) = 0$.
c) Calculer $f(x)$ dans le cas où $|x| > 1$.

4) a) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction

$$h : \theta \rightarrow \ln(x^2 - 2 \cos(\theta).x + 1) \text{ avec } x \in]-1, 1[$$

b) En déduire la valeur de $f(x)$.

XXI .

$$\text{Montrer que } \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$