Exercices d'algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Exercice 1 *On désigne par E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille de fonctions $\left\{f_k : x \longmapsto e^{kx} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ est libre dans E.*

Solution. Il s'agit de montrer que, pour tout entier naturel n, la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans E.
On procède par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, la fonction $f_0 : x \longmapsto 1$ n'est pas la fonction nulle, donc (f_0) est libre dans E.
Supposons le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 0$ et soient $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{kx} = 0$$

en dérivant une fois, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k k e^{kx} = e^x \sum_{k=1}^{n} \lambda_k k e^{(k-1)x} = 0.$$

avec $e^x > 0$ pour tout réel x, ce qui nous donne, en effectuant le changement d'indice $k = j + 1$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j+1} (j+1) e^{jx} = 0$$

et l'hypothèse de récurrence nous dit que $\lambda_{j+1} (j+1) = 0$, soit $\lambda_{j+1} = 0$ pour tout j compris entre 1 et $n-1$. Il reste alors $\lambda_0 f_0 = 0$ dans E avec $f_0 \neq 0$ et $\lambda_0 = 0$. On a donc ainsi montré que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans E.

Exercice 2 *On désigne par E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille de fonctions $\{f_a : x \longmapsto |x - a| \mid a \in \mathbb{R}\}$ est libre dans E.*

Solution. Il s'agit de montrer que, pour tout entier naturel n et toute suite $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ de réels, la famille $(f_{a_k})_{1 \leq k \leq n}$ est libre dans E.
On procède par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 1$, la fonction $f_{a_1} : x \longmapsto |x - a_1|$ n'est pas la fonction nulle, donc (f_1) est libre dans E.
Supposons le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 0$ et soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |x - a_k| = 0$$

On a alors :

$$\forall x \geq a_{n-1}, \ \lambda_n |x - a_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x - a_k) = 0$$

la fonction de droite dans cette égalité étant dérivable en a_n, alors que celle de gauche ne l'est pas si $\lambda_n \neq 0$. On a donc nécessairement $\lambda_n = 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_k |x - a_k|$, ce qui implique la nullité de tous les λ_k pour k compris entre 1 et $n-1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Exercice 3 *Soient a, b deux nombres complexes non nuls et :*

$$E = \left\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n\right\}$$

1. *Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.*

2. *Soit $r \in \mathbb{C}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur r, pour la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dans E.*
3. *Donner une base de E.*

Solution.

1. L'application :
$$\varphi_{a,b} : u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$
est linéaire et $E = \ker(\varphi_{a,b})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
L'application $\psi : u \in E \mapsto (u_0, u_0) \in \mathbb{C}^2$ est linéaire, injective (si $(u_0, u_0) = (0, 0)$, on vérifie facilement que $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et surjective (pour (u_0, u_0) donné dans $\mathbb{C}^2$, en posant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit un élément de E), c'est donc un isomorphisme et $\dim(E) = 2$.
2. Dire que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ équivaut à dire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ r^{n+2} - ar^{n+1} - br^n = r^n \left(r^2 - ar - b\right) = 0$$
ce qui revient à dire que r est racine du trinôme $z^2 - az - b$ (puisque $r \neq 0$).
3. Dans le cas où $\delta = a^2 + 4b$ est non nul, l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$ a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2. On vérifie facilement que les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes et on a ainsi une base de E (ou alors on dit que $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} = \psi^{-1}(1, r_1)$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = \psi^{-1}(1, r_2)$, avec $((1, r_1), (1, r_2))$ base de $\mathbb{C}^2$ pour $r_1 \neq r_2$).
Dans ce cas $E = \left\{(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\right\}$.
Dans le cas où $\delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double $r_1 = \dfrac{a}{2}$ et $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} = \psi^{-1}(1, r_1)$ est un élément on nul de E. Un deuxième élément de E, linéairement indépendant de $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $u = \psi^{-1}(0, r_1)$ (puisque $r_1 \neq 0$). Cette suite est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = r_1$ et :
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n = au_{n+1} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 u_n = r_1(2u_{n+1} - r_1u_n)$$
ce qui donne $u_2 = 2r_1^2$, $u_3 = 3r_1^3$ et par récurrence $u_n = nr_1^n$.
Dans ce cas $E = \left\{((\alpha + \beta n) r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\right\}$.

Exercice 4 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $a \in \mathbb{K}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $u^3 - 3au^2 + a^2u = 0$. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.*

Solution. Dans le cas où E est de dimension finie, en tenant compte du théorème du rang, il suffit de vérifier que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$.
Si $y = u(x) \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)$, on a $u^2(x) = u(y) = 0$ et $u^3(x) = 0$, il en résulte que $a^2u(x) = 0$ et $y = 0$ puisque $a \neq 0$.
Dans le cas général, on a toujours $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$ et la condition vérifiée par u s'écrit $u\left(u^2 - 3au + a^2Id\right) = 0$, ce qui nous dit que pour tout $x \in E$, le vecteur $y = u^2(x) - 3au(x) + a^2x$ est dans $\ker(u)$. On écrit alors que $x = \dfrac{1}{a^2}(y - u(u(x) - 3ax))$ avec $\dfrac{1}{a^2}y \in \ker(u)$ et $\dfrac{1}{a^2}(u(u(x) - 3ax)) \in \operatorname{Im}(u)$, ce qui nous dit que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 5 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, P un polynôme non constant tel que $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $P(u) = 0$. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.*

Solution. Le polynôme P est de la forme $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(X) = \sum_{k=0}^{q} a_kX^k$ et $a_0P'(0) \neq 0$.
Si Q est constant (non nul), on a alors $u = 0$ et $E = \ker(u)$ avec $\operatorname{Im}(u) = \{0\}$.
On suppose donc Q de degré $q \geq 1$.

Si $y = u(x) \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)$, on a $u^2(x) = u(y) = 0$ et $u^k(x) = 0$ pour tout $k \geq 2$, donc $P(u)(x) = a_0 u(x) = 0$ et $y = 0$ puisque $a_0 \neq 0$.

De $u \circ Q(u) = 0$, on déduit que pour tout $x \in E$, le vecteur $y = Q(u)(x) = a_0 x + \sum_{k=1}^{q} a_k u^k(x)$ est dans $\ker(u)$ avec $z = \sum_{k=1}^{q} a_k u^k(x) \in \operatorname{Im}(u)$. On écrit alors que $x = \frac{1}{a_0}(y - z)$ avec $\frac{1}{a_0} y \in \ker(u)$ et $\frac{1}{a_0} z \in \operatorname{Im}(u)$, ce qui nous dit que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 6 *Soit $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (ou plus généralement d'un ensemble E dans un corps commutatif $\mathbb{K}$). Montrer que la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{K}^E$) si, et seulement si, il existe des réels $x_1, \cdots, x_n$ (ou des éléments de E) tels que :*

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix} \neq 0.$$

(un tel déterminant est dit de Gram).

Solution. On note $G_n(x_1, \cdots, x_n)$ le matrice de Gram associé aux f_i et x_j et $g_n(x_1, \cdots, x_n)$ le déterminant de cette matrice.

Supposons qu'il existe des réels $x_1, \cdots, x_n$ tels que $g_n(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.

Si $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j = 0$, on a alors $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x_i) = 0$ pour tout i compris entre 1 et n, c'est-à-dire que le vecteur $\lambda = {}^t(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est solution du système linéaire $G_n(x_1, \cdots, x_n)\lambda = 0$. Comme le déterminant de cette matrice est non nul, elle est inversible et $\lambda = 0$. La famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est donc libre.

Pour la réciproque, on peut procéder par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $f_1 \neq 0$ et il existe un réel x_1 tel que $g_1(x_1) = f_1(x_1) \neq 0$.

Supposons le résultat acquis au rang $n-1$ et soit $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Comme la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ est également libre, l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe des réels $x_1, \cdots, x_{n-1}$ tels que $g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) \neq 0$. On définit alors la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par :

$$f(x) = g_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & f_2(x_{n-1}) & \ddots & f_n(x_{n-1}) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \end{pmatrix}$$

Le développement suivant la dernière ligne nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \delta_j f_j(x)$$

soit :

$$f = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \delta_j f_j$$

dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, où on a noté δ_j le déterminant de la matrice extraite de $G_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, x)$ en supprimant la dernière ligne et la colonne numéro j. Comme la famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre et $\delta_n = g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) \neq 0$, on a $f \neq 0$ et il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_n) = g_n(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.

On peut aussi utiliser le dual de l'espace vectoriel E engendré par $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$. En supposant que cette famille est libre, on a $\dim(E) = \dim(E^*) = n$.

À tout réel x, on associe la forme linéaire $\varphi_x : f \in E \mapsto f(x)$ et on désigne par F le sous-espace vectoriel engendré par $(\varphi_x)_{x\in\mathbb{R}}$. L'orthogonal F° de F dans E est :

$$\begin{aligned} F^\circ &= \{f \in E \mid \forall \varphi \in F,\ \varphi(f) = 0\} \\ &= \{f \in E \mid \forall x \in E,\ \varphi_x(f) = 0\} \\ &= \{f \in E \mid \forall x \in E,\ f(x) = 0\} = \{0\} \end{aligned}$$

donc $\dim(F) = \dim(E) - \dim(F^\circ) = \dim(E) = \dim(E^*)$ et $F = E^*$. De la famille génératrice $(\varphi_x)_{x\in\mathbb{R}}$, on peut alors extraire une base $(\varphi_{x_i})_{1\leq i\leq n}$ et $g_n(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$. En effet dire que $g_n(x_1, \cdots, x_n) = \det((f_j(x_i))) = \det((\varphi_{x_i}(f_j))) = 0$ équivaut à dire que $\det\left(\left(\varphi_{x_j}(f_i)\right)\right) = 0$ (la transposée de $((\varphi_{x_i}(f_j))) = 0$) ce qui signifie que la matrice $\left(\left(\varphi_{x_j}(f_i)\right)\right)$ est non inversible et revient à dire qu'il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ solution du système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_{x_j}(f_i) = 0 \ \ (1 \leq i \leq n)$$

On a donc $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_{x_j} = 0$ (cette forme linéaire est nulle sur la base $(f_k)_{1\leq k\leq n}$) avec des λ_j non nuls, ce qui contredit le fait que $(\varphi_{x_i})_{1\leq i\leq n}$ est libre.

Exercice 7 *Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$. Montrer qu'il existe U, V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.*

Solution. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, la transposée de la comatrice M' est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et on a $MM' = M'M = \det(M) I_n$. En désignant par δ le pgcd de $\det(A)$ et $\det(B)$ dans $\mathbb{Z}$, le théorème de Bézout, nous dit qu'il existe deux entiers relatifs α, β tels que $\alpha \det(A) + \beta \det(B) = \delta$, ce qui nous donne :

$$\alpha AA' + \beta BB' = (\alpha \det(A) + \beta \det(B)) I_n = \delta I_n$$

c'est-à-dire qu'il existe $U = \alpha A', V = \beta B'$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = \delta I_n$.

Exercice 8 *Soient $n \geq 2$ un entier et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ des scalaires dans $\mathbb{K}$. On note :*

$$V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

le déterminant de Vandermonde associé.
On désigne par P le polynôme défini par :

$$P(X) = V(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, X)$$

1. *Quel est le degré de P ?*
2. *Déterminer les racines de P.*
3. *En déduire une expression de P en fonction de $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$.*
4. *En déduire $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.*

Solution. S'il existe deux indices $k < j$ tels que $\alpha_k = \alpha_j$, on a alors $V(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0$ puisque la matrice de Vandermonde corresponde a deux colonnes identiques.
On suppose donc que les α_k sont deux à deux distincts.

1. On a :
$$P(X)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & X \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$$
et le développement suivant la dernière colonne nous dit que $P\in\mathbb{K}^{n-1}[X]$.
2. Pour $X=\alpha_k$ avec k compris entre 1 et $n-1$, la matrice de Vandermonde corresponde a deux colonnes identiques, donc $P(\alpha_k)=0$ et P a $n-1$ racines distinctes. Il existe donc un scalaire λ (dépendant de $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$) tel que $P(X)=\lambda\prod\limits_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k)$.
3. Le coefficient λ est le coefficient de X^{n-1} dans P, soit :
$$\lambda=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}=V(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$$
et :
$$P(X)=V(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})\prod_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k)$$
4. Prenant $X=\alpha_n$, on obtient :
$$P(\alpha_n)=V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=V(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})\prod_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k)$$
et par récurrence, on en déduit que :
$$V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\prod_{1\leq j<k\leq n}(\alpha_k-\alpha_j)$$

Exercice 9

1. *Soit $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'ordre n (i. e. telle que $N^n=0$ et $N^{n-1}\neq 0$).*
Montrer que N est semblable à :
$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. *Soit $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'ordre $r\in\{1,\cdots,n\}$. Montrer que I_n+N est inversible d'inverse $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k$.*
3. *Pour toute matrice N nilpotente d'ordre $r\in\{1,\cdots,n\}$, on désigne par $\ln(I_n+N)$ la matrice définie par :*
$$\ln(I_n+N)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}N^k$$
Montrer que, pour toute matrice nilpotente N, on a :
$$\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(\ln(I_n+tN))=I_n+tN.$$

4. *En déduire que pour tout nombre complexe non nul λ, il existe une matrice nilpotente $N' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + N = e^{\mu I_n + N'}$.*

Solution. On désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à N. Il est aussi nilpotent d'ordre n.

1. Comme $u^{n-1} \neq 0$, il existe un vecteur non nul x dans E tel que $u^{u-1}(x) \neq 0$ et on vérifie que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre.
   Si $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0$, on a alors :
$$0 = u^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x)\right) = \lambda_0 u^{n-1}(x)$$
   ($u^{n+k} = 0$ pour $k \geq 0$) et $\lambda_0 = 0$. Si $n = 1$, c'est fini, sinon en supposant que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$ pour $0 \leq j \leq n-2$, on a $\sum_{k=j+1}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ et, en appliquant v^{n-2-j} à cette dernière égalité, on obtient $\lambda_{j+1} u^{n-1}(x) = 0$ et $\lambda_{j+1} = 0$. D'où le résultat.
   La famille $\mathcal{B}_x = \left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est donc une base de E et la matrice de u dans cette base est J.
   Dans la base $\left(u^{n-1}(x), \cdots, u(x), x\right)$ la matrice est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tJ$$

2. On peut remarquer que si N est nilpotente d'ordre $r \geq 1$, son polynôme minimal est alors X^r et nécessairement $r \leq n$.
   Pour N nilpotente d'ordre $r \geq 1$, on a :
$$\begin{aligned}(I_n + N)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k N^k \\ &= I_n - (-1)^n N^n = I_n\end{aligned}$$
   donc $I_n + N$ est inversible et $(I_n + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k N^k$.

3. Pour toute matrice nilpotente N et tout réel t, la matrice :
$$N(t) = \ln(I_n + tN) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k N^k = N \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k N^{k-1}$$
   (on a $N^n = 0$) est nilpotente et la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :
$$\varphi(t) = \exp(\ln(I_n + tN)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(N(t))^k$$
   est polynomiale en t, donc indéfiniment dérivable avec :
$$\varphi'(t) = N'(t)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}(N(t))^{k-1} = N'(t)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(N(t))^k = N'(t)\varphi(t)$$

et :

$$N'(t) = N \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} N^{k-1} = N (I_n + tN)^{-1}$$

soit :

$$(I_n + tN)\, \varphi'(t) = N \varphi(t)$$

En dérivant à nouveau, il vient :

$$(I_n + tN)\, \varphi''(t) + N\varphi'(t) = N\varphi'(t)$$

et $\varphi''(t) = 0$ (puisque $(I_n + tN)$ est inversible), ce qui nous donne :

$$\varphi'(t) = \varphi'(0) = N\varphi(0) = N$$

($\varphi(0) = \exp(\ln(I_n))$ avec $\ln(I_n) = 0$) et :

$$\varphi(t) = tN + \varphi(0) = tN + I_n$$

soit $\exp(\ln(I_n + tN)) = I_n + tN$.

4. Comme $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = e^{\mu}$ et on a :

$$\exp\left(\ln\left(I_n + e^{-\mu} N\right)\right) = I_n + e^{-\mu} N$$

soit :

$$e^{\mu} \exp\left(\ln\left(I_n + e^{-\mu} N\right)\right) = \lambda I_n + N$$

ou encore $\lambda I_n + N = e^{\mu I_n + N'}$ avec $N' = \ln(I_n + e^{-\mu} N)$ nilpotente.

Exercice 10

1. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un polynôme $P_{n-1} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $1 + X - P_{n-1}^2$ soit divisible par X^n.*
2. *En déduire que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente, avec $n \geq 2$, il existe alors une matrice A telle que $I_n + N = A^2$.*

Solution.

1. Si $P_{n-1}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, on a alors $P_{n-1}^2(X) = \sum_{k=0}^{2n-2} b_k X^k$ avec :

$$b_k = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k \\ i+j=k}} a_i a_j \ \ (0 \leq k \leq 2n-2)$$

et $1 + X - P_{n-1}^2$ est divisible par X^n si, et seulement si :

$$\begin{cases} b_0 = a_0^2 = 1 \\ b_1 = 2a_0 a_1 = 1 \\ b_k = 2a_0 a_k + \sum\limits_{\substack{1 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k}} a_i a_j = 0 \ \ (2 \leq k \leq n-1) \end{cases}$$

Prenant $a_0 = 1$, on détermine ainsi de manière unique les coefficients a_k pour $k = 1, \cdots, n-1$.

2. Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, on a alors $N^n = 0$ et :

$$I_n + N - P_{n-1}^2(N) = N^n Q(N) = 0$$

soit $I_n + N = A^2$ avec $A = P_{n-1}(N)$.
Par exemple, pour $n = 3$, on a :

$$\left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2\right)^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 X + \left(2a_0 a_2 + a_1^2\right) X^2 + 2a_1 a_2 X^3 + a_2^2 X^4$$

donc :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ 2a_0 a_1 = 1 \\ 2a_0 a_2 + a_1^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2 = -\dfrac{1}{8} \end{array}\right.$$

donne la solution $P_2(X) = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8}$ et pour $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$A = P_2(N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^2$$

et :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + J.$$

Exercice 11 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, telle que $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$ pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Montrer que A est non inversible.*
2. *Montrer que $A = 0$.*

Solution. Pour $n = 1$, on a toujours $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$.

1. Prenant $X = A$, on a $\det(2A) = 2^n \det(A) = 2\det(A)$ et $\det(A) = 0$ puisque $n \geq 2$.
2. Comme A est non inversible, son rang r est compris entre 0 et $n-1$. Si $A \neq 0$, on a alors $1 \leq r \leq n-1$ et A est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire qu'il existe P, Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$. En prenant $X = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}Q$, on a $A + X = PQ$, donc $\det(A + X) = \det(PQ) \neq 0$, en contradiction avec $\det(A) = \det(X) = 0$ et $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$. On a donc $r = 0$ et $A = 0$.

Exercice 12 *Soient a, b dans un corps commutatif $\mathbb{K}$. Calculer :*

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Solution. Si $ab=0$, on a alors $D_n(a,b)=(a+b)^n$ (a^n ou b^n).
Supposons $a\neq 0$ et $b\neq 0$.
Pour les premières valeurs, on trouve :

$$D_2(a,b)=a^2+ab+b^2,\ D_3(a,b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

En développant $D_n(a,b)$ suivant la dernière ligne on a :

$$\begin{aligned} D_n(a,b) &= (a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & ab & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a+b & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & ab \end{vmatrix} \\ &= (a+b)D_{n-1}(a,b)-abD_{n-2}(a,b). \end{aligned}$$

Supposant que $D_r(a,b)=\displaystyle\sum_{k=0}^{r}a^kb^{r-k}$ pour $1\leq r\leq n-1$, on a :

$$\begin{aligned} D_n(a,b) &= (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}-ab\sum_{k=0}^{n-2}a^kb^{n-2-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}a^{k+1}b^{n-1-k}+\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-2}a^{k+1}b^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}a^kb^{n-k}+\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k}-\sum_{k=1}^{n-1}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k} \end{aligned}$$

Exercice 13

1. *Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit les matrices réelles R et J par $R=\Re(P)$ et $J=\Im(P)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que la matrice $R+\lambda J$ soit inversible.*
2. *En déduire que si $A,\ B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Solution.

1. Si le polynôme $\varphi(X)=\det(R+XJ)$ s'annule pour toute valeur réelle il est alors identiquement nul et $\varphi(i)=\det(R+iJ)=\det(P)=0$ ce qui contredit P inversible. Il existe donc des réels λ tels que $\varphi(\lambda)=\det(R+\lambda J)\neq 0$.
2. Si A,B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe alors une matrice P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A=P^{-1}BP$. On a alors en notant R la partie réelle de P et J sa partie imaginaire :

$$(R+iJ)A=B(R+iJ)$$

et en identifiant parties réelles et parties imaginaires $RA=BR$, $JA=BJ$. Pour tout réel λ tel que $R+\lambda J$ soit inversible on a alors $(R+\lambda J)A=B(R+\lambda J)$, ce qui prouve que les matrices A et B sont donc semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 *Montrer que si $v\in\mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors 0 est valeur propre de v et $\mathrm{Tr}(v)=0$.*

Solution. Supposons v nilpotent d'ordre $q \geq 1$, soit que $v^{q-1} \neq 0$ et $v^q = 0$.
Avec $\det(v^q) = (\det(v))^q = 0$, on déduit que $\det(v) = 0$ et 0 est valeur propre de v.
On peut aussi dire si $x \in E$ est tel que $v^{q-1}(x) \neq 0$, on a alors $v\left(v^{q-1}(x)\right) = v^q(x) = 0$ et 0 est valeur propre de v (la dimension de E n'intervient pas ici).
Pour montrer que la trace d'un endomorphisme nilpotent est nulle, on procède par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E.
Pour $n = 1$, l'unique endomorphisme nilpotent est l'endomorphisme nul et sa trace est nulle.
Supposons le résultat acquis pour les espaces de dimension au plus égale à $n - 1 \geq 1$ et soit $v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$ avec E de dimension $n \geq 2$. Comme 0 est valeur propre de v, il existe un vecteur non nul e_1 dans le noyau de v et en complétant ce vecteur en une base $\mathcal{B}$ de E, la matrice de v dans cette base est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Avec $A^{q+1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha B^q \\ 0 & B^{q+1} \end{pmatrix} = 0$, on déduit que B est nilpotente et en conséquence $\mathrm{Tr}(B) = 0$ (l'hypothèse de récurrence nous donne le résultat sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$), ce qui entraîne $\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$.

Exercice 15 *Montrer que, pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, v est nilpotent si, et seulement si, 0 est la seule valeur propre de v. Que se passe-t-il pour $\mathbb{K}$ non algébriquement clos ?*

Solution. On a déjà vu que si v est nilpotent d'ordre q, alors 0 est valeur propre de v. S'il existe une autre une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de v, on a alors pour tout vecteur propre non nul associé x, $v^q(x) = \lambda^q x = 0$ et $\lambda = 0$. On peut aussi dire que si v est nilpotent d'indice q, son polynôme minimal est X^q et 0 est l'unique valeur propre de v (le fait que $\mathbb{K}$ soit algébriquement clos n'intervient pas ici).
Réciproquement si 0 est la seule valeur propre de v avec $\mathbb{K}$ algébriquement clos, alors le polynôme minimal de v est X^q avec $1 \leq q \leq n$ et v est nilpotent.
Pour $\mathbb{K}$ non algébriquement clos, un endomorphisme v peut avoir 0 pour seule valeur propre dans $\mathbb{K}$ sans être nilpotent comme le montre l'exemple de l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^3$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dans la base canonique avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Le polynôme caractéristique de v est :

$$P_v(X) = -X\left((\cos(\theta) - X)^2 + \sin^2(\theta)\right),$$

la seule valeur propre réelle est 0 et pour tout entier $q \geq 1$, on a :

$$A^q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q\theta) & -\sin(q\theta) \\ & \sin(q\theta) & \cos(q\theta) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Exercice 16 *On suppose le corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle (ce qui signifie que le morphisme d'anneaux $k \mapsto k \cdot 1$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$ est injectif, ce qui est encore équivalent à dire que l'égalité $k\lambda = 0$ dans $\mathbb{K}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ équivaut à $k = 0$).*
Montrer qu'un endomorphisme v est nilpotent si, et seulement si, $\mathrm{Tr}\left(v^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et n.

Solution. Si v est nilpotent, il en est de même de v^k pour tout entier $k \geq 1$ et $\mathrm{Tr}\left(v^k\right) = 0$.
Pour la réciproque, on procède par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E.
Pour $n = 1$, on a $v(x) = \lambda x$, $\mathrm{tr}(v) = \lambda$ et le résultat est trivial.
Supposons le résultat acquis pour les espaces de dimension au plus égale à $n - 1 \geq 1$ et soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Tr}\left(v^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n = \dim(E) \geq 2$. Si $P_v(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ est le polynôme

caractéristique de v, en tenant compte de $P_v(v) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k v^k = 0$ et $\operatorname{tr}\left(v^k\right) = 0$ pour $k = 1, \cdots, n$, on déduit que $\operatorname{tr}(P(v)) = na_0 = 0$ et $a_0 = \det(v) = 0$ puisque $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Donc 0 est valeur propre de v et il existe une base $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de v est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Avec $A^k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha B^{k-1} \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$, on déduit que $\operatorname{tr}\left(B^k\right) = \operatorname{tr}\left(A^k\right) = \operatorname{tr}\left(v^k\right) = 0$ pour tout $k = 1, \cdots, n$ et l'hypothèse de récurrence nous dit que B est nilpotente. Enfin, en notant p l'indice de nilpotence de B, avec $A^{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha B^p \\ 0 & B^{p+1} \end{pmatrix} = 0$, on déduit que A est nilpotente et il en est de même de v.
Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos et de caractéristique nulle, on peut donner la démonstration directe suivante.
Supposons que $\operatorname{Tr}\left(v^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n = \dim(E)$. S'il existe des valeurs propres non nulles $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ d'ordres respectifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ avec p compris entre 1 et n, on a :

$$\operatorname{Tr}\left(v^k\right) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda_j^k = 0 \ \ (1 \leq k \leq p)$$

(comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, il existe une base de E dans laquelle la matrice de v est triangulaire de diagonale $(0, \lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_p, \cdots, \lambda_p)$ et dans cette base, la matrice de v^k est aussi triangulaire de diagonale $\left(0, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_1^k, \cdots, \lambda_p^k, \cdots, \lambda_p^k\right)$. Mais la matrice de ce système d'équations aux inconnues α_j est une matrice de type Vandermonde de déterminant :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^p & \cdots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j \prod_{1 \leq i < j \leq p-1} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

ce qui entraîne que tous les α_j sont nuls puisque $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Mais on a alors une contradiction avec $\alpha_j \geq 1$.
En définitive 0 est la seule valeur propre de v et v est nilpotent.