ANALYSE REELLE

I. Soit (E,d) un espace métrique et $x \in E$.

1. Montrer que $\operatorname{diam}\left(\mathcal{B}_f(x,r)\right) \leq 2r$.
2. Donner un exemple où $\operatorname{diam}\left(\mathcal{B}_f(x,r)\right) < 2r$.

II. 1. Montrer que les applications $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_\infty = \operatorname{Max}(|x_1|,|x_2|),$$
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|)$$
$$\text{et } \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.

2. Représenter $\mathcal{B}_f(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ relativement à chacune de ces trois normes.

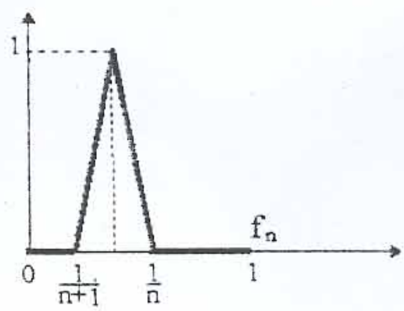
III.1. Montrer que les applications $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ définies sur $E=\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ par

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\ ;\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \text{ et } \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2\,dt}$$

sont des normes sur E.

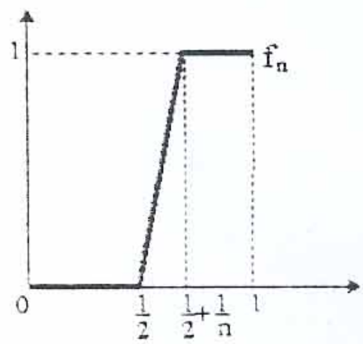
2. Montrer que $\forall f \in E,\ \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$
3. Montrer qu'il n'existe pas $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leq k\|f\|_2$ ou $\|f\|_2 \leq k\|f\|_1$ (on pourra utiliser la fonction f_n définie sur [0,1] par $f_n(t)=t^n$).

IV. Soit $E=\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$



1. Définir bien proprement ces fonctions f_n.
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ est convergente dans E muni de $\|\ \|_1$
3. Montrer que cette suite n'est pas convergente dans E muni de $\|\ \|_\infty$

V. Soit $E=\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$



1. Définir proprement f_n.
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ est de Cauchy dans E muni de $\|\ \|_1$
3. Montrer que cette suite n'est pas convergente dans E muni de $\|\ \|_1$
4. Que se passe-t-il avec $\|\ \|_\infty$?

I. 1. Montrer que toute partie d'un espace mètrique discret est un ouvert et un fermé de cet espace.

2. Montrer que dans $\mathbb{R}$ muni du mètrique usuel, $\overset{\circ}{Q} = \varnothing$ et $\overline{Q} = \mathbb{R}$

II. Soient (E,d) un espace mètrique et A, B deux parties de E. Montrer que:

(i) si $A \subset B$ alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$

(ii) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ et $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

(iii) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

et donner un exemple dans $\mathbb{R}$ usuel où

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \text{ et } \overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$$

III. Soient (E,d) un espace mètrique, $a \in E$ et $r > 0$.

1. Montrer que $\overline{B_o(a,r)} \subset B_f(a,r)$

   Peut-on affirmer dans le cas général que $\overline{B_o(a,r)} = B_f(a,r)$?

2. Si $(E, \| \|)$ est un e.v.n, montrer que $\overline{B_o(0,1)} = B_f(0,1)$

IV. Soient (E,d) un espace mètrique, A, B deux parties de E, A ouvert.

1. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

   Ce résultat reste-t-il vrai si A n'est pas ouvert ?

2. Enoncer la propriété complémentaire.

V. Soit A une partie bornée d'un espace mètrique (E,d).

Montrer que $\overline{A}$ est bornée et que $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$.

ANALYSE REELLE

I. Montrer que tout ouvert U de $\mathbb{R}$ usuel est réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Indication: On pose $I = \{(x,n) \in Q \times \mathbb{N}^* \text{ tel que }]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\subset U \}$.

Montrer que si $y \in U$ alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $z \in Q$ tq $]y - \frac{1}{p}, y + \frac{1}{p}[\subset U$ et $y \in]z - \frac{1}{2p}, z + \frac{1}{2p}[$ et en déduire que $U = \bigcup_{(x,n)\in I}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$.

II. Soient A, B deux fermés disjoints d'un espace métrique (E,d). Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints de (E,d) dont l'un contient A et l'autre contient B.

Indication: Pour $x \in A$ (resp. $y \in B$) on pose $\varepsilon_x = d(x,B)$ et $U = \bigcup_{x\in A} B_o(x, \frac{1}{2}\varepsilon_x)$

(resp. $\varepsilon_y = d(y,A)$ et $V = \bigcup_{y\in B} B_o(y, \frac{1}{2}\varepsilon_y)$).

III. Soient (E,d) un espace métrique, (B,d) un sous-espace avec la métrique induite.

1. Montrer que les fermés de (B,d) sont les traces de fermés de (E,d) sur B. En déduire que si B est un fermé de (E,d) alors les fermés de (B,d) sont les fermés de (E,d) qui sont inclus dans B.
2. Montrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A}^B = \overline{A}^E \cap B$.

IV. Soit G un sous-groupe non vide de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure.
2. On pose $a = \text{Inf}(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.
   a) Montrer que si $a > 0$ alors $G = a\mathbb{Z}$.
   b) Montrer que si $a = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$ (usuel).
3. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ sont deux fermés de $\mathbb{R}$ (usuel) et que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que la somme de deux fermés d'un espace métrique n'est pas nécessairement un fermé.

V. 1. Montrer que $A = \{(x, \frac{1}{x});\ x \in \mathbb{R}_+^*\}$ et $B = \{(0,y);\ y \in \mathbb{R}\}$ sont deux fermés de $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$.

2. Déterminer $d_\infty(A,B)$.
3. $A + B$ est-il un fermé dans $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$?

I. Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces mètriques et $f: E \longrightarrow F$ une application.

Montrer l'équivalence des propriétés suivantes:

(i) f est continue

(ii) pour tout $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

(iii) pour tout $B \subset F$, $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$

II. Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces mètriques, A et B deux fermés de (E,d) tels que $E = A \cup B$ et $f: E \longrightarrow F$ une application dont la restriction $g = f/_A$ et la restriction $h = f/_B$ sont continues. Montrer que f est continue.

III. Soit $T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2 = 1 \}$.

L'application f de $[0, 2\pi[$ (munie du mètrique usuel) dans T (muni du mètrique induit par d_∞) définie par $f(t) = (\text{Cos}\, t, \text{Sin}\, t)$ est-elle un homéomorphisme ?

IV. On considère l'application $\delta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$(x,y) \longrightarrow |\text{Arc}\tan x - \text{Arc}\tan y|$$

1. Vérifier que δ est une distance sur $\mathbb{R}$, topologiquement équivalente à la distance usuelle d.
2. Soit $\{x_n\}_{n \in N}$ la suite définie par $x_n = n$.
   a) Montrer que la suite $\{x_n\}_{n\in N}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, \delta)$.
   b) Cette suite converge-t-elle dans $(\mathbb{R}, \delta)$?

V. Soient (E,d) un espace mètrique, A et B deux parties de E tq $\overline{A} \cap B = \varnothing$ et $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Soient $U = \{ x \in E \text{ tq } d(x,A) < d(x,B) \}$ et $V = \{ x \in E \text{ tq } d(x,B) < d(x,A) \}$. Montrer que ce sont deux ouverts disjoints de (E,d) contenant A et B respectivement.

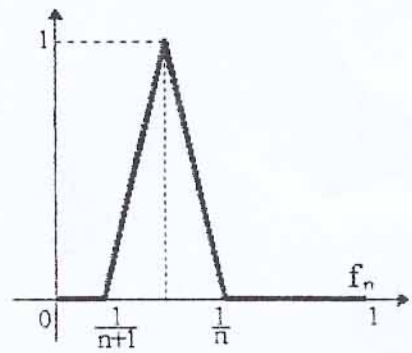
I. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$ et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[a,b]$. On pose $\alpha = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{Lim}}\ \mathrm{Sup}\ x_n$. Montrer que $\forall \varepsilon>0\ ]\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $[a,b]$ est compact.

II. Soient (E,d) un espace métrique et A,B deux parties non vides de E. Montrer que : si A compacte, B fermée et $A\cap B=\varnothing$, alors $d(A,B)>0$.

III. Soit $E=\mathscr{C}([0,1]\,;\mathbb{R})$.

Montrer que $B_f(0,1)$ n'est pas compact dans (E,d_∞).

Indication: on pourra utiliser les fonctions f_n



IV. Soient (E,d) un espace métrique compact et $f:E\to E$ une application telle que, pour tout $x,y\in E$, $d(f(x),f(y))<d(x,y)$.

1. Montrer que s'il existe un élément a de E vérifiant $f(a)=a$ alors cet élément a est unique.
2. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(x)=d(x,f(x))$. Montrer que $\{\varphi(x)\,;x\in E\}$ admet un minimum dans $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f possède un point fixe a unique.
4. On considère la suite de E définie par son premier terme x_0, et pour $n\in\mathbb{N}$, par $x_{n+1}=f(x_m)$. Montrer que cette suite tend vers a.

V. *Théorème de Dini*. Soient (E,d) un espace métrique compact et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ tq:

(i) la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers une fonction f continue sur E,

(ii) pour tout $x\in E$, $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon>0$ on pose $F_{n,\varepsilon}=\{x\in E \text{ tq } f_n(x)\le f(x)-\varepsilon\}$.

1. Montrer que $F_{n,\varepsilon}$ est une partie fermée de E.
2. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon}=\varnothing$ puis qu'il existe $n_\circ\in\mathbb{N}$ tel que $F_{n_\circ,\varepsilon}=\varnothing$.
3. En déduire que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E.

I. Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que:

1. s'il existe $r>0$ tel que toute boule fermée $B_f(x,r)$ soit complète, alors (E,d) est complet.
2. si toute boule fermée est compacte alors (E,d) est complet, et les compacts de E sont les fermés bornés.

II. Soit f une application bijective d'un espace métrique (E,d) dans un autre (F,δ). Montrer que si (E,d) est complet, f continue et f^{-1} uniformément continue, alors (F,δ) est complet..

III. Pour $m,n\in\mathbb{N}$, on pose $d(m,n)=\begin{cases}0 & \text{si } m=n,\\ \frac{1}{2}+e^{-|m-n|} & \text{si } m\neq n.\end{cases}$

1. Montrer que $(\mathbb{N},d)$ est un espace métrique complet.
2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $F_n=B_f(n,\frac{1}{2}+e^{-2n})$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ F_{3n}\subset F_n$ et que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_{3k}=\varnothing$.
   - Que peut-on conclure ?

IV. Soient X un ensemble non vide, $E=B(X,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{rcl}\|\ \|_\infty : E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ f & \longrightarrow & \sup_{x\in X}|f(x)|\end{array}$ est une norme sur E.
2. Montrer que $(E,\|\ \|_\infty)$ est complet.

V. Soit f une application d'un espace métrique (E,d) dans lui-même. f^p désigne la composée de f par elle-même p fois $(p\in\mathbb{N}^*)$.

1. Montrer que si f^p admet un point fixe c et un seul alors f admet c pour unique point fixe.
2. On suppose que f^p est k^p-Lipschitzienne $(k>0)$ sur (E,d).
   a) Montrer que la fonction δ définie sur $E\times E$ par :
   $\delta(x,y)=d(x,y)+\frac{1}{k}d(f(x),f(y))+\cdots+\frac{1}{k^{p-1}}d(f^{p-1}(x),f^{p-1}(y))$ est une distance sur E et que f est Lipschitzienne de rapport k sur (E,δ).
   b) Montrer que d et δ sont régulièrement équivalentes si et seulement si f est Lipschitzienne sur (E,d).
   c) On suppose que (E,d) est complet, que f est Lipschitzienne sur (E,d) et que f^p est contractante. Montrer que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0\in E$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$, converge vers l'unique point fixe c de f.
   - Donner une majoration de $d(x_n,c)$ en fonction de $d(x_0,c)$ et de n.

I. Si A et B sont des sous-ensembles d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$, on note : $A+B = \{a+b\ ;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrer que :

1. Si A est ouvert alors $A+B$ est ouvert.
2. Si A et B sont compacts alors $A+B$ est compact.
3. Si A est compact et B fermé alors $A+B$ est fermé.
   - Ce résultat subsiste-t-il si A est seulement fermé ?

II. Montrer que l'application N définie sur $E = \mathscr{C}([0,1]; \mathbb{R})$ par $N(f) = \int_0^1 e^t\,|f(t)|\,dt$ est une norme sur E. N est-elle équivalente à $\| \ \|_\infty$?

III. Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
   a) Montrer que $\forall x \in E$ il existe $\hat{x} \in F$ tel que $d(x,F) = \|x - \hat{x}\|$.
   b) En déduire que si $F \neq E$ alors il existe un vecteur unitaire u de E tel que $d(u,F) = 1$.
2. Montrer alors que si E est de dimension infinie, il existe une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de la sphère unité $S(0,1)$ telle que $\|u_m - u_n\| \geq 1$ pour $m \neq n$.
3. Conclure que E est de dimension finie si et seulement si $B_f(0,1)$ est compact. (théorème de Riesz)

IV. Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1]; \mathbb{R})$. On définit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par $N(f) = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$.
Montrer que N est une norme et que (E, N) est un espace de Banach. N est-elle équivalente à $\| \ \|_\infty$? (on pourra utiliser les fonctions f_n définies par $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{Sin}(nx)$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2n}]$ et $f_n(x) = \frac{1}{n}$ si $x \in [\frac{\pi}{2n}, 1]$)

V. Montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est de Banach si et seulement si toute série $\sum u_n$ normalement convergente est convergente.

Indication: Montrer que si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \| \ \|)$ alors on peut en extraire une sous-suite $\{S_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\forall k \in \mathbb{N},\ \|S_{\varphi(k+1)} - S_{\varphi(k)}\| \leq 2^{-k}$

I. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \ \|_\infty$. Soit T la transformation de $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Déterminer $|||T|||$.

II. On munit $\mathbb{R}[x]$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par $\left\| \sum_0^n a_k x^k \right\| = \underset{0 \leq k \leq n}{\text{Max}} |a_k|$.

1. Vérifier que $\| \ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que l'application L définie sur $\mathbb{R}[x]$ par $L(p) = p'$ n'est pas continue.
3. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}[x]$ par $\varphi(p) = p(c)$ est continue si et seulement si $|c| < 1$. – Déterminer dans ce cas $|||\varphi|||$.

III. 1. Soient $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$, et $T : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ f \longrightarrow T(f) \end{array}$ définie par $\forall f \in E, \forall x \in [0,1] : \ (T(f))(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que T est linéaire continue et calculer $|||T|||$.

b) Même exercice en changeant $\| \ \|_\infty$ par $\| \ \|_1$.

2. Trouver deux normes respectivement sur les espaces vectoriels $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ tq l'application linéaire $f \longrightarrow f'$ de $\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ soit continue.

IV. En utilisant le théorème du point fixe dans l'espace $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni d'une norme adéquate, montrer que l'équation $u(t) = t\,e^{1+\sin^2 t} + \int_0^1 \min(s,t)\,\cos(u(s))\,ds \ \ (0 \leq t \leq 1)$ admet une et une seule solution u_0 dans E.

Indication: on pourra calculer $m(t) = \int_0^1 \min(s,t)\,ds$.

V. Soient $A \in \mu_n(\mathbb{R})$ et T l'application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même définie par $T(X) = AX$. On munit $\mathbb{R}^n$ des normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ successivement.

1. Montrer que T est continue et déterminer $|||T|||$.
2. a) Donner alors (dans chacun des cas) une condition nécessaire et suffisante pour que l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même définie par $f(X) = AX + b$ (où $b \in \mathbb{R}^n$) soit contractante.

   b) Que peut-on conclure ?

I. A. Soit E un espace vectoriel réel. On appelle hyperplan "vectoriel" de E, tout sous-espace vectoriel H de E tel que si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient H alors $F = H$ ou $F = E$.

1. Montrer que si H est un hyperplan de E et $x \in E \setminus H$ alors $E = H \oplus [x]$ où $[x]$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par x.
2. Montrer que pour qu'une partie H d'un espace vectoriel E soit un hyperplan de E, il faut et il suffit qu'elle soit le noyau d'une forme linéaire.

B. Soit $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer qu'un hyperplan H de E est soit fermé, soit dense dans E.
2. Soit T une forme linéaire non nulle sur E telle que $T^{-1}(0)$ soit un fermé de E.
   a) Montrer que $T^{-1}(1)$ est un fermé non vide de E.
   b) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $T^{-1}(1) \cap B_f(0,r) = \emptyset$.
   c) Montrer alors que $\forall x \in B_f(0,r)$, $|T(x)| \leq 1$.
   d) Conclure que T est continue.
3. a) Montrer que pour qu'un hyperplan H de E soit fermé, il faut et il suffit qu'il soit le noyau d'une forme linéaire continue.
   b) Montrer que pour qu'une forme linéaire soit continue, il faut et il suffit que $f^{-1}(0)$ soit fermé.

II. A. Soient (E,d) un espace métrique complet et $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de (E,d) dense.

1. a) Soient $x \in E$ et $r > 0$. Construire une suite $\{(x_n, r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E \times \mathbb{R}_+^*$ telle que $B_f(x_0,r_0) \subset B_0(x,r) \cap O_0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $r_n < 2^{-n}$ et $B_f(x_{n+1},r_{n+1}) \subset B_0(x_n,r_n) \cap O_{n+1}$
   b) Conclure que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E. (théorème de Baire)
2. Soit $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de (E,d) tq $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide.

B. Soit T une application linéaire continue et surjective d'un espace de Banach $(E, \| \, \|)$ dans un autre (F,N).

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{T(B_0^E(0,n))}$ est d'intérieur non vide.
2. En déduire qu'il existe $R > 0$ et $s > 0$ tels que $\overline{T(B(0,R))} \supset B(0,s)$
3. Montrer alors que $\forall y \in B(0,s)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$ tel que $\forall i \in \{1,2,\ldots\}$, $\|x_i\| < \frac{R}{2^{i-1}}$ et $N(y - T(x_1) - T(x_2) - \ldots - T(x_n)) \leq \frac{s}{2^n}$.
4. En déduire que $T(B_F^E(0, 2k)) \supset B_0^F(0, s)$
5. Conclure que l'application T est ouverte.