TABLE DES MATIÈRES

Deuxième partie 2. Exercices

1. Particule dans un champ magnétique

On se propose d'étudier la trajectoire d'une particule de masse m chargée sous l'action d'un champ magnétique et d'un champ électrique constants (*cf* [2]). Notons $\vec{B}$ le champ magnétique supposé uniforme, E le champ électrique et q la charge de la particule. Si $\vec{V}$ et $\vec{\gamma}$ désignent la vitesse et l'accélération de la particule, la loi de Lorentz donne :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = q\vec{V} \wedge \vec{B} + q\vec{E}. \tag{1.1}$$

γ étant la dérivée de $\vec{V}$, (1.1) est un système différentiel linéaire du premier ordre en $\vec{V} = \begin{cases} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{cases}$.

L'application $u : \vec{V} \mapsto \frac{q}{m}\vec{V} \wedge \vec{B}$ est linéaire : nous noterons A la matrice associée à cette application linéaire dans une base de $E = \mathbb{R}^3$ et $Q = \frac{q}{m}$. On a donc :

$$\vec{V}' = A\vec{V} + Q\vec{E}.$$

Or,

$$u^2\left(\vec{V}\right) = Q^2\left(\vec{V} \wedge \vec{B}\right) \wedge \vec{B} = Q^2\|\vec{B}\|^2 P_{\vec{B}}\left(\vec{V}\right)$$

où $P_{\vec{B}}\left(\vec{V}\right)$ désigne la projection orthogonale de $\vec{V}$ sur le plan vectoriel de vecteur normal $\vec{B}$. Mais $u\left(\vec{V}\right) = QP_B\left(\vec{V}\right) \wedge \vec{B}$ de sorte que , pour $p \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} A^{2p}\left(\vec{V}\right) &= (-1)^p Q^{2p}\|\vec{B}\|^{2p} P_{\vec{B}}\left(\vec{V}\right) && (1.2) \\ A^{2p+1}\left(\vec{V}\right) &= (-1)^p Q^{2p+1}\|\vec{B}\|^{2p}\vec{V} \wedge \vec{B}. && (1.3) \end{aligned}$$

Il est donc facile de calculer l'exponentielle e^{tA} : si $\vec{B} \neq 0$

$$e^{tA}\vec{V} = \vec{V} - \cos(Qt)\, P_{\vec{B}}\left(\vec{V}\right) + \frac{1}{\|\vec{B}\|}\sin(Qt)\,\vec{V} \wedge \vec{B}.$$

Si le champ électrique est nul, la particule suit un mouvement hélicoïdal uniforme tracé sur un cylindre d'axe de direction vectorielle $\vec{B}$. Si $\vec{E} \neq 0$ est colinéaire à $\vec{B}$, le mouvement est encore un mouvement hélicoïdal mais accéléré dans la direction de $\vec{E}$.

2. Théorème fondamental des courbes planes

On consultera à ce sujet ([1] Tome 4 p. 392)

THÉORÈME 2.1. — *Soit L un réel strictement positif et g une application continue de $[0, L]$ dans $\mathbb{R}$. Il existe, à une isométrie du plan près, une et une seule courbe plane de longueur L dont la courbure est donnée par $\rho(p) = g(s)$ si p est le point d'abscisse curviligne s.*

Les courbes obtenues n'ont aucune raison d'être injectives : elles peuvent donc avoir des point multiples.

DÉFINITION 2.2. — *Soit γ un arc géométrique de classe $\mathscr{C}^k$ et régulier , avec $k \geqslant 2$. On appelle paramétrisation normale de γ une paramétrisation $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\forall s \in I, \quad \left\|\gamma'(s)\right\| = 1$$

Pour une telle paramétrisation le paramètre s est appelé l'abscisse curviligne .

Une telle paramétrisation existe pour tout arc régulier. Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation normale d'un arc géométrique orienté on a : $\gamma(s)' \cdot \gamma'(s) = 1$ de sorte que $2\gamma''(s) \cdot \gamma'(s) = 0$: c'est-à-dire que le vecteur $\gamma''(s)$ est orthogonal au vecteur tangent unitaire $\gamma'(s)$.

Pour tout $s \in I$, on complète le vecteur unitaire tangent en s, $\tau(s) = \gamma'(s)$, en une base orthonormée directe $(\tau(s), n_1(s))$. C'est-à-dire que $n_1(s)$ est l'image de $\tau(s)$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

En dérivant la relation $\|\tau(s)\|^2 = 1$, on déduit que $\tau(s)\tau'(s) = 0$ et donc qu'il existe une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall s \in I, \quad \tau'(s) = \rho(s)\, n_1(s)$$

En utilisant le fait que $\left|\rho(s)\right| = \left\|\tau'(s)\right\| = C(s)$ (courbure en s), on peut donner la définition suivante.

DÉFINITION 2.3. — *On appelle* courbure algébrique (ou orientée) *en s (ou en $\gamma(s)$ si le point est simple) la fonction ρ définie par $\tau'(s) = \rho(s)\, n_1(s)$ $(s \in I)$.*

Si $\rho(s) \neq 0$, alors $R_1(s) = \dfrac{1}{\rho(s)}$ est le rayon de courbure algébrique en s.

Si $\gamma'(s) = (x'(s), y'(s))$ on a $n_1(s) = (-y'(s), x'(s))$. Notons $\theta(s)$ l'angle de vecteurs (e_1, γ') –défini localement– un calcul simple montre que $\rho(s) = \theta'(s)$. La courbure donne donc la vitesse de rotation du vecteur tangent unitaire.

Remarque 2.4. — Un changement d'orientation de la courbe change le signe de la courbure algébrique.

Si φ est un déplacement alors la courbure algébrique de $\varphi \circ \gamma$ en s est égale à celle de γ en s.

THÉORÈME 2.5. — **[formules de Frénet dans le plan]** *Avec les notations précédentes, on a :*
(i) $\tau'(s) = \rho(s)\, n_1(s)$.
(ii) $n_1'(s) = -\rho(s)\,\tau(s)$.

2.1. Démonstration du théorème fondamental

THÉORÈME 2.6. — *Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

(i) *Il existe une paramétrisation normale $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ d'un arc géométrique régulier orienté de classe $\mathscr{C}^2$ telle que ρ soit la courbure algébrique de γ.*

(ii) *Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ est une autre paramétrisation normale admettant ρ comme courbure algébrique, alors il existe déplacement φ tel que :*

$$\forall t \in I, \alpha(t) = \varphi \circ \gamma(t)$$

Démonstration. — (i) Le problème est de trouver γ telle que $\tau'(s) = \rho(s)\, n_1(s)$.

On calcule tout d'abord les coordonnées du vecteur unitaire tangent en les faisant apparaître comme solutions d'un système différentiel linéaire.

Si $\tau(s) = (\tau_1(s), \tau_2(s))$, alors le vecteur $n_1(s) = (-\tau_2(s), \tau_1(s))$ est déduit par une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et la définition du rayon de courbure algébrique s'écrit sous forme d'un système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} \tau_1'(s) = -\rho(s)\,\tau_2(s) \\ \tau_2'(s) = \rho(s)\,\tau_1(s) \end{cases}$$

En se donnant $a \in I$ et se fixant $\tau(a)$ unitaire, il existe une unique solution de classe $\mathscr{C}^1$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \left(\|\tau(s)\|^2\right)' &= 2\left(\tau_1(s)\tau_1'(s) + \tau_2(s)\tau_2'(s)\right) \\ &= 2\rho(s)\left(-\tau_1(s)\tau_2(s) + \tau_2(s)\tau_1(s)\right) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\|\tau(s)\| = \|\tau(a)\| = 1$.

Il suffit alors de poser :
$$\gamma(s) = \int_a^s \gamma'(u)\,du + \gamma(a) = \int_a^s \tau(u)\,du + \gamma(a)$$
où on s'est donné $\gamma(a) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Si γ et α sont des paramétrisations normales de même courbure algébrique ρ, alors elles vérifient le même système différentiel :
$$z'(s) = \rho(s)\left(-z_2(s), z_1(s)\right) \tag{2.1}$$
Si $\tau = \gamma'$, alors pour toute rotation u, $u \circ \tau$ est aussi solution de (2.1). En effet, on a :
$$\begin{aligned}(u\circ\tau)(s) &= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_1(s)\\ \tau_2(s)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta)\tau_1(s) - \sin(\theta)\tau_2(s)\\ \sin(\theta)\tau_1(s) + \cos(\theta)\tau_2(s)\end{pmatrix}\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}(u\circ\tau)'(s) &= \begin{pmatrix}\cos(\theta)\tau_1'(s) - \sin(\theta)\tau_2'(s)\\ \sin(\theta)\tau_1'(s) + \cos(\theta)\tau_2'(s)\end{pmatrix}\\ &= \rho(s)\begin{pmatrix}-\cos(\theta)\tau_2(s) - \sin(\theta)\tau_1(s)\\ -\sin(\theta)\tau_2(s) + \cos(\theta)\tau_1(s)\end{pmatrix}\\ &= \rho(s)\begin{pmatrix}-(u\circ\tau)_2(s)\\ (u\circ\tau)_1(s)\end{pmatrix}\end{aligned}$$
On choisit alors, pour a donné dans I, une rotation qui vérifie $u(\tau(a)) = f'(a)$ et par unicité de la solution de (2.1) avec condition initiale, on a $u\circ\gamma' = \alpha'$.

Il en résulte alors qu'il existe un vecteur constant b tel que $u\circ\gamma + b = \alpha$. □

Exercice 2.1 Déterminer les courbes planes dont la courbure $c(s)$ est une fonction affine de s.

Remarque 2.7. — Le théorème 2.6 est faux si on remplace la courbure algébrique par sa valeur absolue, à moins de supposer qu'elle ne s'annule jamais (pas de points d'inflexion).

Remarque 2.8. — On a un théorème analogue pour les courbes gauches caractérisées par leur courbure et leur torsion.

3. Résolution d'un système linéaire très simple

On veut résoudre le système $Y' = AY$ où $Y = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et
$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$
avec condition initiale $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 1$

Dans un premier temps nous allons utiliser le logiciel Xcas :

```
1 A :=[[2,1,1],[1,2,1],[1,1,2]]
```
$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \tag{3.1}$$
```
2 eigenvals(A)
```
$$4, 1, 1 \tag{3.2}$$
```
3 pcar(A,x) ; factor(pcar(A,x))
```
$$x^3 - 6\cdot x^2 + 9\cdot x - 4, \quad (x-4)(x-1)^2 \tag{3.3}$$

$\boxed{4}$ `eigenvectors((A)`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$\boxed{5}$ `exp(t*A)`

$$\begin{pmatrix} \frac{8e^t+4e^{4\cdot t}}{12} & \frac{-e^t+e^{4\cdot t}}{3} & \frac{-4e^t+4e^{4\cdot t}}{12} \\ \frac{-4e^t+4e^{4\cdot t}}{12} & \frac{2e^t+e^{4\cdot t}}{3} & \frac{-4e^t+4e^{4\cdot t}}{12} \\ \frac{-4e^t+4e^{4\cdot t}}{12} & \frac{-e^t+e^{4\cdot t}}{3} & \frac{8e^t+4e^{4\cdot t}}{12} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$\boxed{6}$ `simplify(exp(t*A)*[[1],[1],[1]])`

$$\begin{pmatrix} e^{4\cdot t} \\ e^{4\cdot t} \\ e^{4\cdot t} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Ce qui nous donne évidemment la solution :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{4t} \\ y(t) &= e^{4t} \\ z(t) &= e^{4t} \end{aligned}$$

Utilisons maintenant la transformée de Laplace. Nous savons déjà que x, y et z sont de croissance au plus exponentielle ; nous pouvons donc, pour $s \in \mathbb{R}$ assez grand, calculer

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)\exp(-st)\,dt,\ Y(s) = \int_0^{+\infty} y(t)\exp(-st)\,dt \text{ et } Z(s) = \int_0^{+\infty} z(t)\exp(-st)\,dt.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{aligned} (s-2)X(s) - Y(s) - Z(s) &= 1 \\ -X(s) + (s-2)Y(s) - Z(s) &= 1 \\ -X(s) - Y(s) + (s-2)Z(s) &= 1. \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ `linsolve([(s-2)*x -y-z=1, -x+(s-2)*y-z=1,-x-y+(s-2)*z=1],[x,y,z])`

$$[\frac{1}{s-4}, \frac{1}{s-4}, \frac{1}{s-4}] \tag{3.7}$$

Et l'inversion de Laplace nous donne :

$\boxed{8}$ `ilaplace(1/(s-4),s,x)`

$$e^{4\cdot x} \tag{3.8}$$

4. Un autre système linéaire

On considère le système de trois ressorts de raideur k et deux masses suivant La loi fondamentale de la mécanique montre que si y_1 et y_2 désignent les élongations des deux premiers ressorts on a

$$-my_1" - ky_1 - k(y_1 - y_2) = 0 \tag{4.1}$$
$$k(y_1 - y_2) - my_2" - ky_2 = 0. \tag{4.2}$$

(1) Écrire ce système d'équations différentielle sous forme d'un sytème différentiel d'ordre 1.

(2) Déterminer les valeurs propres de la matrice 4×4 associée dans le cas où $k = 1$ et $m = 1$.

(3) On se donne pour condition initiale $y_1(0) = \alpha$, $y_1'(0) = 0$. $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 0$. Étudier le mouvement.

(4) On impose maintenant un mouvement sinusoïdal à l'extrémité précédemment fixe du « premier »ressort. Étudier le mouvement.

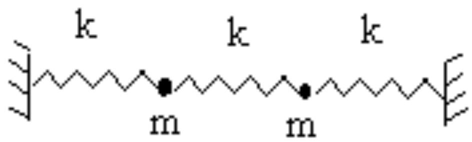

FIGURE *1. Ressorts couplés.*

Notant

$$Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_1'\\ y_2\\ y_2'\end{pmatrix},$$

on a le système

$$Y'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -2k & 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ k & 0 & 2k & 0\end{pmatrix}Y.$$

La commande `factor(pcar(A,x))` (ne pas oublier de passer en mode complexe) montre que le polynôme caractéristique de A admet pour racines $i, -i, i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$. A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
$\boxed{9}$ `factor(pcar(A,x)) ;`

$$(x+i)\cdot(x+-i)\cdot(x+i\sqrt{3})\cdot(x+-i\sqrt{3}) \tag{4.3}$$

$\boxed{10}$ `jordan(A)`

$$\begin{pmatrix} -i & i & i & -i\\ -1 & -1 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ -i & i & -i & i\\ -1 & -1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3}\cdot -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\cdot i\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Cette dernière réponse nous donnant une matrice de passage et une forme diagonale de A. Enfin, $\boxed{11}$ `B :=exp(t*A)*[[a],[0],[0],[0]]`

$$\begin{pmatrix} a(\frac{e^{i\cdot t}}{4}+\frac{e^{-i\cdot t}}{4}-3\cdot\frac{1}{12}\cdot -1e^{\sqrt{3}\cdot i\cdot t}+3\cdot\frac{1}{12}\cdot i\cdot -ie^{-\sqrt{3}\cdot i\cdot t})\\ a(\frac{ie^{i\cdot t}}{4}+\frac{-ie^{-i\cdot t}}{4}+3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot ie^{\sqrt{3}\cdot i\cdot t}+3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot -ie^{-\sqrt{3}\cdot i\cdot t})\\ a(\frac{e^{i\cdot t}}{4}+\frac{e^{-i\cdot t}}{4}+3\cdot\frac{1}{12}\cdot -1e^{\sqrt{3}\cdot i\cdot t}-3\cdot\frac{1}{12}\cdot i\cdot -ie^{-\sqrt{3}\cdot i\cdot t})\\ a(\frac{ie^{i\cdot t}}{4}+\frac{-ie^{-i\cdot t}}{4}-3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot ie^{\sqrt{3}\cdot i\cdot t}-3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot -ie^{-\sqrt{3}\cdot i\cdot t})\end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$\boxed{12}$ `B(1)`

$$[a(\frac{e^{-\sqrt{3}\cdot i\cdot t}}{4}+\frac{e^{i\cdot t}}{4}+\frac{e^{-i\cdot t}}{4}+\frac{e^{\sqrt{3}\cdot i\cdot t}}{4})] \tag{4.6}$$

Autrement dit, $y_1(t)=\frac{a}{2}\left(\cos(t)+\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right)$ [(1)] et $y_2(t)=\frac{a}{2}\left(\cos(t)-\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right)$.

[(1)] ce dernier résultat étant obtenu avec `real(B(1))` par exemple

5. Une équation linéaire à coefficients non constants

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{5.1}$$

On se propose de montrer le théorème

THÉORÈME 5.1. — *L'ensemble des solutions $\mathscr{C}^2$ de* (5.1) *au voisinage de* 0 *est l'espace vectoriel engendré par la fonction analytique*

$$J_0(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^{2n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)d\theta.$$

De plus aucune solution de (5.1) *sur un intervalle de la forme* $]-a,0[$ *ou* $]0,a[$ *avec* $a>0$ *et linéairement indépendante de* J_0 *ne se prolonge en* 0.

Le théorème de cauchy ne s'applique pas sur $\mathbb{R}$ puisque le coefficient de y" s'annule en 0.

Cherchons tout d'abord s'il existe une solution développable en série entière $y = \sum a_n x^n$.

Le terme en x^n dans xy" provient du terme en x^{n-1} de y" : son coefficient est donc $(n+1)na_{n+1}$; celui du terme en y' est $n+1)a_{n+1}$ et enfin, celui de xy est a_{n-1}. On a donc la relation

$$(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0.$$

D'autre part, l'équation porposée montre que $a_1 = y'(0) = 0$ de sorte que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $a_{2p+1} = 0$ et, une récurrence simple montre que

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2^2 4^2 \cdots (2p)^2} a_0 = (-1)^p \frac{1}{4^p \left(p!\right)^2} a_0.$$

On pose

$$J_0(x) = \sum_0^{+\infty} (-1)^p \frac{4^p \left(p!\right)^2{}^{2p}}{x}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière étant infini, c'est une solution de (5.1). On peut aussi écrire

$$J_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(x\sin(t)\right)\,dt$$

comme on le voit en développant en série entière en $\cos\left(x\sin(t)\right)$ en x puis en intégrant terme à terme (ce qu'il faut évidemment justifier).

Sur tout intervalle $I =]-\alpha,0[$ ou $]0,\alpha[$ l'équation proposée s'écrit $y" + \frac{1}{x}y' + y = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy : l'espace des solutions réelles de (5.1) sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soit f une solution linéairement indépendante de J_0 sur un intervalle $]0,\alpha[$. L'équation s'écrit $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}$. Le wronskien $w(J_0, f)$ vérifie donc l'équation différentielle $w' = -\frac{1}{x}w$ de sorte que $w(x) = \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ puisque f et J_0 sont indépendantes. Si f est bornée, on a, puisque $J_0(0) = 1$ et $J_0'(0) = 0$,

$$f'(x) \sim_{0+} \frac{\lambda}{x}$$

et, l'intégrale de $\frac{1}{x}$ étant divergente en $0+$,

$$f(x) \sim_{0+} \lambda \ln(x)$$

ce qui contredit notre hypothèse. f n'est donc pas bornée en 0^+. De plus, si f est solution sur $]-\alpha,0^[$, $x \mapsto f(-x)$ est solution sur $]0,\alpha[$ et la parité de J_0 permet donc de conclure qu'il n'existe pas de solution bornée au voisinage de 0^- linéairement indépendante de J_0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. ARNAUDIÈS & H. FRAYSSE, *Cours de mathématiques*, Dunod université, Dunod, Paris.

[2] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Grenoble sciences, Presses universitaires de Grenoble, 1991 (07-Aubenas, Grenoble.