ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Table des matières

1. Le cas linéaire

1.1. Généralités

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ et U un ouvert de E. Si f est une application continue de $I \times U$ dans E, une solution de *l'équation différentielle* $u' = f(t,u)$ est une application dérivable y de I dans U telle que $y'(t) = f(t, u(t))$ pour tout $t \in I$. Si, pour tout $t \in I$ l'application $x \mapsto f(t,x)$ est une application *affine* (continue [1]) on dit que l'équation est linéaire. On peut alors l'écrire sous la forme

$$Y' = A(t)Y + B(t) \tag{1.1}$$

avec $A : I \to \mathcal{L}(E)$ et $B : I \to E$ *continues*.

---

(1) c'est toujours le cas en dimension finie

1.2. Théorème de Cauchy linéaire

THÉORÈME 1.1. — *Soient A une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et B une application continue de I dans E. Pour tout point (t_0, Y_0) de $I \times E$, l'équation linéaire (1.1) admet une unique solution définie sur I tout entier et égale à Y_0 en t_0.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que y est solution de (1.1) et $Y(t_0) = Y_0$ si, et seulement si, pour tout $t \in I$ on a

$$Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)Y(u) + B(u))\, du. \tag{1.2}$$

Soit J un intervalle *compact* inclus dans I : sur J A et B sont bornées : il existe α et β réels tels que $\|A(t)\| \leqslant \alpha$ et $\|B(t)\| \leqslant \beta$ pour tout $t \in J$. On définit $Y_0(t) = Y_0$ puis, pour tout entier $n > 0$,

$$Y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)Y_n(u) + B(u))\, du.$$

On a alors :

$$\|Y_1 - Y_0\| \leqslant (\alpha\|Y_0\| + \beta)\,|t - t_0|$$

et, par récurrence,

$$\|Y_{n+1} - Y_n\| \leqslant (\alpha\|Y_0\| + \beta)\,\frac{\alpha^n |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La série de terme général $\frac{\alpha^n |t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ étant convergente, la série $\sum (Y_{n+1}(t) - Y_n(t))$ converge normalement donc uniformément puisque E est complet : la suite Y_n converge donc uniformément vers une fonction continue Y qui vérifie (1.2. C'est donc une solution de l'équation proposée.

Si Y_1 et Y_2 sont solutions sur J, leur différence Y vérifie pour tout $t \in J$

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} A(u)Y(u)du.$$

Mais Y est continue donc bornée par un réel M sur le *compact* J de sorte que pour tout $t \in J$ on a

$$\|Y(t)\| \leqslant M\alpha|t - t_0|.$$

Il en résulte comme ci-dessus, que pour tout entier n

$$\|Y(t)\| \leqslant M\alpha^n \frac{|t - t_0|^n}{n!}.$$

Y est donc identiquement nulle sur J ce qui prouve l'unicité.

Si J_1 et J_2 sont deux intervalles compacts de I d'intersection non vide contenant t_0, les solutions Y_{J_1} et Y_{J_2} définies ci-dessus coïncident, par unicité, sur $J_1 \cap J_2$ on peut donc définir une solution Y sur $J_1 \cup J_2$. D'autre part, si $t \in I$, il existe un compact J de I contenant t et t_0 : il existe donc une solution *globale* du problème posé (*problème de Cauchy*) □

Remarques 1.2. — – Si Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (1.1), $Y_1 - Y_2$ est solution de l'équation homogène $U'(t) = A(t)U(t)$. Pour résoudre (1.1) il suffit donc de résoudre l'équation homogène et de trouver une solution (souvent appelée « solution particulière »de l'équation « complète ».

– Soit $(t_0, y_0) \in I \times E$. D'après le théorème précédent, il extiste une *unique* solution de (1.1) passant par y_0 au temps t_0. Il en résulte que les trajectoires $\{(t, Y(t))\,;\, t \in I\}$ des solutions forment une *partition* de $I \times E$.
– Le théorème de Cauchy montre en outre que si $t \in I$ (I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$) l'application $\sigma_t : y \in \mathcal{S} \mapsto y(t) \in E$ est un isomorphisme : l'espace des solutions est donc de dimension $\dim(E)$. La résolvante. $R(t, t_0)$ est la matrice de $\sigma_t \circ \sigma_{t_0}^{-1}$. La résolvante permet de résoudre l'équation complète par « variation des constantes ».
– (1.2) montre alors que l'espace des solutions de (1.1) est un *espace affine* de dimension $\dim E$.
– Bien noter que ce qui précède n'est en général plus vrai si I n'est pas un intervalle. On pourra par exemple chercher l'ensemble des solutions de $y' = y$ sur $I =]-1, 0[\cup]1, 2[$.

1.3. Équations différentielles linéaires *scalaires*

1.3.1. Équations du premier ordre

Comme nous l'avons vu, pour résoudre sur un intervalle I l'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1.3}$$

il suffit d'une part de trouver les solutions de l'équation homogène $y' = -a(x)y$ puis de trouver *une solution* de (1.3). La fonction a étant continue sur I y admet des primitives ; soit A l'une d'elles. Il est facile de vérifier que pour tout réel C, la fonction $x \mapsto C \exp(-A(x))$ est solution et que ce sont les seules (*cf.* la dimension). Nul besoin, d'ailleurs, d'invoquer les mânes de Cauchy pour montrer que ce sont les seules solutions. Il suffit en effet, si y est solution, de remarquer que la dérivée de $y(x)e^{A(x)}$ est nulle sur I.

La méthode de Lagrange (dite encore méthode de « variation de la constante, consiste à chercher une solution de l'équation complète de la forme $y(x) = C(x) \exp(-A(x))$ or

$$y'x) = C'(x) \exp(-A(x)) - a(x)C(x) \exp(-A(x))$$

de sorte que y est solution si et seulement si $C'(x) = b(x) \exp(A(x))$. La fonction $x \mapsto b(x) \exp(A(x))$ étant continue sur I, si $x_0 \in I$,

$$y(x) = \exp(-A(x)) \int_{x_0}^{x} b(t) \exp(A(t))\, dt$$

fournit une solution.

Remarque 1.3. — On le voit, même dans le cas des équations du premier ordre , on n'a en général –hormis dans quelques exercices bien choisis– aucun moyen de calculer *explicitement* les solutions d'une équation différentielle. Les études qualitatives des solutions (voir la suite) et les méthodes de résolution approchée sont donc indispensables.

Pour les équations différentielles linéaires, on consultera avec profit ([3] et [4]).

1.3.2. Utilisation d'un logiciel

Les logiciels de calcul formel permettent parfois de résoudre explicitement des équations différentielles.

Dans le cas d'équations linéaires scalaires on peut utiliser, avec Xcas, la commande `desolve`. Par exemple, la commande

```
desolve(y'+x*y=0)
```
fournit $C_0\exp(-x^2/2)$ et la commande
```
desolve(y'+x*y-exp(x)=0)
```
fournit
$$C_0e^{-\frac{x^2}{2}}+e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{\frac{x^2+2\cdot x}{2}}\,dx \tag{1.4}$$
Xcas fournit en outre plusieurs fonctions permettant de tracer des trajectoires de solutions (`odeplot, interactive_plotode` *etc* ...) ce qui peut être très intéressant un jour d'oral.

1.4. Équations linéaires du second ordre

On considère ici des équations de la forme
$$y"+a(x)y'+b(x)y=c(x) \tag{1.5}$$
où les fonctions a, b et c sont continues sur un intervalle I.

1.4.1. Le cas des coefficients constants

On vérifie sans peine que $e^{\alpha x}$ est solution de l'équation sans second membre si α est racine de l'équation *algébrique* $X^2+aX+b=0$.

Soient α_k les racines complexes de cette équation (dite *équation caractéristique*) et supposons que α_k soit une racine de multiplicité n_k. Alors toute fonction de la forme $P(t)e^{\alpha_k t}$ où P est un polynôme de degré $\leqslant n_k-1$ est solution de l'équation sans second membre. Une simple considération de dimension permet alors de démontrer que toute solution v de l'équation homogène s'écrit d'une seule façon sous la forme
$$v(t)=\sum P_k(t)e^{\alpha_k t}$$
avec $d^0P_k\leqslant n_k-1$.

Il nous suffit donc de trouver une solution de l'équation complète. Si f_1 et f_2 sont deux solutions *linéairement indépendantes* de l'équation sans second membre, toute solution de cette dernière s'écrit sous la forme $C_1f_1+C_2f_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes. On cherche alors une solution de la forme $C_1(t)f_1(t)+C_2(t)f_2(t)$. On impose en outre la condition $C_1'(x)f_1(x)+C_2'(x)f_2(x)=0$ et tout revient alors à résoudre le système [(2)]
$$\begin{array}{rcl} C_1'f_1'+C_2'f_2' &=& c(x)\\ C_1'f_1+C_2'f_2 &=& 0\end{array}$$
La seconde équation permet de calculer C_1' en fonction de C_2', f_1 et f_2 et l'on obtient alors une solution par intégration.

En pratique, on peut distinguer les cas suivants :

– Si $c(x)$ est un polynôme de degré n, on peut chercher une solution particulière de la forme $Q(x)$ où Q est un polynôme de degré
  a) n si $c\neq 0$
  b) $n+1$ si $c=0$
  c) $n+2$ si $b=c=0$

[(2)] Voir ce qui suit sur le Wronskien

– Si $c(x) = P(x)e^{\alpha x}$ où P est un polynôme de degré n on cherche une solution de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$ avec
  a) $d^0 Q = n$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique
  b) $d^0 Q = n + 1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique
  c) $d_0 Q = n + 2$ si α est racine double de l'équation caractéristique

Si $c(x) = P(x)\cos\omega x$ ou $P(x)\sin\omega x$ il suffit de remarquer qu'une solution particulière de $u"+au'+bu = f_1+f_2$ s'obtient en prenant le somme d'une solution particulière de $u"+au'+bu = f_1$ et d'une solution particulière de $au" + au' + bu = f_2$.

1.5. Utilisation d'un Wronskien

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. L'espace $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation homogène $Y' = AY$ où $A\ : I \to \mathcal{L}(E)$ est une fonction continue, est un espace vectoriel de dimension n. On dit que $(y_1, \cdots y_n)$ est un système fondamental de solutions si les y_i sont des solutions et si $(y_1, \cdots y_n)$ est une base de $\mathcal{S}$.

Définition 1.4. — *Soient $y_1, y_2, \cdots y_n$ des solutions sur I de l'équation $Y' = AY$. Le* Wronskien *de ce système de solutions est le déterminant*

$$W(t) = \det\left(y_1(t), \cdots, y_n(t)\right).$$

Puisque $\sigma_t : y \in \mathcal{S} \mapsto y(t) \in E$ est un isomorphisme, si $W(t_0) \neq 0$, alors $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ et si $W(t_0) = 0$ alors W est identiquement nul. D'autre part, un calcul simple montre que

$$W'(t) = tr\left(A(t)\right) W(t)$$

de sorte que

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} tr\left(A(s)\right)\, ds\right).$$

1.5.1. Cas du second ordre scalaire

Soit (e_1, e_2) des solutions de l'équation différentielle

$$y" + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Le Wronskien de e_1 et e_2 est l'application

$$W\ :\ t \mapsto \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_1' & e_2' \end{pmatrix}.$$

W est dérivable et

$$W'(t) = e_1 e"_2 - e_2 e"_1 = -a(t)W(t)$$

et $W(t) = C\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)du\right)$. Il en résulte que si les conditions initiales $(e_1(t_0), e_1'(t_0))$ et $(e_2(t_0), e_2'(t_0))$ sont linéairement independantes, pour tout $t \in I$ on a $W(t) \neq 0$ et réciproquement. On remarque alors, que si l'on connait e_1, on peut obtenir e_2 en résolvant une équation linéaire du premier ordre sur chaque intervalle où e_1 ne s'annule pas.Si

$$W(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on retrouve le déterminant de la résolvante.

Tout ceci se généralise aux équations linéaires scalaires d'ordre n.

1.6. Utilisation de séries entières

1.6.1. Séries majorantes

DÉFINITION 1.5. — *Soient $S_1 = \sum a_n z^n$ et $S_2 = \sum b_n z^n$ deux séries entières. On dit que S_2 est une série* majorante *de S_1 si pour tout entier n on a $|a_n| \leqslant b_n$.*

Si S_2 est une série majorante de S_1 le rayon de convergence de S_1 est supérieur ou égal à celui de S_2. Si S_1 a pour rayon de convergence ρ , pour tout $r < \rho$ il existe $M > 0$ tel que

$$\sum M \left(\frac{z}{r}\right)^n = \frac{M}{1 - \frac{z}{r}}$$

soit une série majorante de S_1.

La notion de série majorante permet de montrer assez simplement

(1) Les propriétés sur la somme, le produit de séries entières.

(2) Le résultat sur la composition de deux séries entières : si f est développable en série entière sur $D(0, R)$ et si g est développable en série entière sur $D(0, R')$ et vérifie $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ est développable en série entière sur un disque de centre 0.

(3) Si f est développable en série entière sur un disque de centre 0 et si $f(0) \neq 0$ alors $1/f$ est développable en série entière dans un disque de centre 0.

(4) la somme d'une série entière est continue sur son disque de convergence

(5) la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ est dérivable sur son disque de convergence et $f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$; il en résulte que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque de convergence.

PROPOSITION 1.6. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La somme de la série est une fonction continue.*

Démonstration. — Si $f(z) = \sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et si $0 < \rho < R$ pour tout $z \in D(0, \rho)$ et tout h tel que $|h| < \rho - |z|$

$$|f(z + h) - f(z)| \leqslant \sum |a_n|((|z| + |h|)^n - |z|^n)$$

de sorte qu'il existe $M > 0$ tel que la série $\dfrac{M}{1 - \frac{|z|+|h|}{\rho}} - \dfrac{M}{1 - \frac{|z|}{\rho}}$ soit une majorante de $f(z+h) - f(z)$. La continuité de la majorante entraîne alors celle de f. On pourrait de même démontrer la dérivabilité de f sans utiliser la convergence uniforme de la série dérivée terme à terme *etc.* □

PROPOSITION 1.7. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La somme de la série est une fonction dérivable et $f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$.*

Démonstration. — Utiliser des séries majorantes. □

En ce qui concerne les opérations « algébriques »on utilise souvent le résultat suivant : soit (a_n) une suite et c_n une suite définie par récurrence par des premiers termes $c_0, \cdots, c_k$ et, pour $n + 1 > k$ des relations de récurrence de la forme

$$c_{n+1} = P_n(a_1, a_2, \cdots, a_n, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

où pour tout n P_n est un polynôme en les $(a_i)_{i \leqslant n}$, les $(b_i)_{i \leqslant n}$ et les $(c_i)_{i \leqslant n}$ à *coefficients positifs*. Si α_n est une majorante de a_n (*i.e.* si pour tout n on a $|a_n| \leqslant \alpha_n$, si β_n est une majorante de b_n

et si $\gamma_0 = |c_0|, \cdots, \psi_k = |c_k|$ alors, la suite γ définie par ses k premiers termes et les relations de récurrence

$$\gamma_{n+1} = P_n(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$$

est une majorante de la suite c. tout $i \leqslant k$.

Théorème 1.8. — *Soit $f(z) = \sum_1^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ telle que $a_1 \neq 0$. Alors il existe une série entière $g(z) = \sum b_n z^n$ de rayon de convergence strictement positif r telle que l'on ait, dans un voisinage de 0, $f \circ g(z) = z$ et $g \circ f(z) = z$.*

Démonstration. — Par les séries majorantes ([2] p. 372). □

1.7. Séries entières et équations différentielles

Pour le problème de Cauchy Lipschitz on pourra consulter [1]. Nous nous restreindrons ici à l'étude d'équations différentielles linéaires.

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(z)y(z) = f(z) \quad (E)$$

où les a_k et f sont développables en série entières de rayon de convergence R. On se propose de montrer que *toutes* les solutions de cette équation sont développables en série entière dans $D(0, R)$.

Étudions tout d'abord le cas d'une équation du premier ordre

$$y' = a(z)y + b(z) \quad (E_1).$$

Si $a(z) = \sum a_n z^n$ et $b(z) = \sum b_k z^k$, $y = \sum \alpha_k z^k$ est solution (formelle) de (E_1) telle que $y(0) = \alpha_0$ si et seulement si

$$\alpha_0 a_0 + b_0 = \alpha_1 \quad \forall n \geqslant 1 \quad (n+1)\alpha_{n+1} = \sum_0^n a_k \alpha_{n-k} + b_n.$$

Soit $|a_n| \leqslant A_n$ et $|b_n| \leqslant B_n$ des majorantes. Il est facile de voir par récurrence que la suite β_n définie par $\beta_0 \geqslant |\alpha_0|$ et

$$\beta_0 A_0 + B_0 = \beta_1 \quad \forall n \geqslant 1 \quad (n+1)\beta_{n+1} = \sum_0^n A_k \beta_{n-k} + B_n$$

est une majorante de (α_n). Il nous suffit donc de montrer que l'équation obtenue en remplaçant $a(z)$ et $b(z)$ par des séries majorantes admet une solution ayant un rayon de convergence supérieur ou égal R pour conclure.

Or, pour tout $0 < \rho < R$ il existe $M > 0$ tel que $\dfrac{M}{1 - \frac{z}{\rho}}$ soit une série majorante de a et b et l'équation

$$y' = \frac{M}{1 - \frac{z}{\rho}}(y + 1)$$

admet pour solution $C(1 - \frac{z}{\rho})^{-M\rho}) - 1$ qui a pour rayon de convergence ρ. Cette solution donne une majorante de $\sum \alpha_n z^n$ dès que $C > 1 + |\alpha_0|$ qui a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à R. Une équation linéaire d'ordre n se ramenant à un système de n équations du premier ordre le résultat est démontré (remarquer que l'on peut utiliser la même majorante pour chaque équation).

Pour une équation homogène, on peut aussi remarquer que l'on peut prendre $\dfrac{M}{(1-\frac{z}{\rho})^{n-k}}$ pour majorante de a_k de sorte qu'il suffit de trouver une série entière solution de

$$y^{(n)} = \sum_1^n \frac{M}{(1-\frac{z}{\rho})^k} y^{(n-k)}.$$

Or $y = C(1-\frac{z}{\rho})^{-\mu}$ est solution si et seulement si μ est solution de l'équation algébrique

$$P(\mu) = \prod_0^n (\mu+p) - \sum (1)^{k-1} \rho^{n-k} \prod_0^k (\mu+p) - M\rho^n = 0$$

qui admet une solution réelle positive puisque $P(0) < 0$ et $P(\mu)$ tend vers l'infini quand $\mu \to +\infty$. Si on se donne des valeurs de $y(0)$ et $y'(0)$ en prenant $C > |y(0)|$ et $\frac{\mu C}{\rho} > |y'(0)|$ on obtient une majorante de la série cherchée qui a donc un rayon de convergence $\geqslant \rho$. Ceci étant vrai pour tout $\rho < R$ on obtient le résultat.

2. Quelques exercices

Exercice 2.1 **[Préambule]** Soient $a_1, \ldots, a_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que toute solution non-nulle de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$ a ses zéros isolés. (Si $t_0 \in I$ et $y(t_0) = 0$, utiliser une formule de Taylor en t_0)

Exercice 2.2 On considère l'équation différentielle $z" + a(x)z' + b(x)z = 0$ à coefficients continus sur un intervalle I.

(1) Montrer qu'en posant $z(x) = u(x)y(x)$ on peut se ramener à étudier une équation différentielle (E) de la forme $y" + py = 0$ où p est une fonction continue sur I

(2) On suppose que p est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. Montrer que toute solution de $y" + py = 0$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Soit z une solution de l'équation différentielle $z'' - pz = 0$ *non identiquement nulle*. Montrer que z s'annule au plus une fois.

(3) Soient f, g deux solutions indépendantes de (E). Si α et β (avec $\alpha < \beta$) sont deux zéros consécutifs de f (*cf.* exercice 2), alors il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $g(\gamma) = 0$.

(4) On suppose désormais que l'on a deux équations du second ordre

$$(E_1) : \; y'' + p(t)y = 0$$
$$(E_2) : \; y'' + q(t)y = 0$$

où $p \leqslant q$ sont deux fonctions continues sur un intervalle I. On considère f (resp. g) une solution non-identiquement nulle de (E_1) (resp. de E_2). Montrer que si α et β sont deux zéros consécutifs de f, alors il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $g(\gamma) = 0$.

(5) **Comparaison à un cas classique** Soit l'équation $y'' + q(t)y = 0$, et f une solution non-identiquement nulle de cette équation. Montrer que

– si $q(t) \leqslant M^2$, alors deux zéros consécutifs de f sont distants d'au moins π/M ;

– si $q(t) \geqslant M^2$, alors dans tout intervalle I de longueur π/M, f admet au moins un zéro dans I.

Exercice 2.3 Soit p une fonctions continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que l'"équation différentielle $y" + p(x)y = 0$ admet des solutions non bornées. (Raisonner par l'absurde en utilisant le Wronskien).

2.0.1. Éléments de solution

Soient $a_1, \dots, a_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Toute solution non identiquement nulle de l'équation $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = 0$ a ses zéros isolés.

En effet, soit y une solution non identiquement nulle, si $y(t_0) = 0$ il existe $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que $y^{(k)}(t_0) \neq 0$ (unicité du problème de Cauchy). Soit donc p le plus petit entier tel que $y^{(p)}(t_0) \neq 0$. La formule de Taylor-Young donne

$$y(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} y^{(p)}(t_0) + o\left((t-t_0)^p\right) = (t-t_0)^p \left(\frac{y^{(p)}(t_0)}{p!} + \varepsilon(t-t_0) \right)$$

avec $\lim_{t_0} \varepsilon(t-t_0) = 0$. t_0 est donc un zéro isolé.

Un calcul simple montre que $z(x) = u(x)y(x)$ est solution de $z" + a(x)z' + b(x)z = 0$ si et seulement si

$$y"u + y'\left(2u' + au\right) + (u" + bu)y = 0.$$

Si u est une solution non nulle de $2u' + au = 0$ on a

$$u(x) = C \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{x} a(s)ds \right)$$

avec $C \neq 0$. La fonction u ne s'annule donc pas et z est solution de l'équation initiale si et seulement si y est solution de

$$y" + (u" + bu)y = y" + py = 0$$

qui est bien de la forme cherchée.

Supposons p continue à valeurs strictement positives. Si y ne s'annule pas, étant continue sur $\mathbb{R}$, elle a un signe fixe et $y"$ est de signe opposé. Quitte à étudier $-y$, on peut toujours supposer que $y(x)$ est strictement positif pour tout x : $y"(x)$ est donc strictement négatif pour tout x et y est concave. Notons que, l'équation étant linéaire, y est une solution *globale*, et le graphe de y est au dessous de ses tangentes. Si une tangente a une pente non nulle, y tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de la pente. Ceci est exclu : les tangentes ont donc une pente nulle et $y'(x) = 0$ pour tout x. Alors $y" = 0$ et $y = 0$ ce qui contredit notre hypothèse.

Si $z" = pz"$ et si z s'annulait plus d'une fois, entre deux zéros consécutifs t_0 et t_1 on aurait z de signe constant. On peut toujours supposer $z > 0$ sur $]t_0, t_1[$ et z serait strictement convexe sur cet intervalle. Le graphe de z serait alors situé sous le segment $[t_0, t_1]$ d'où $z(t) \leqslant 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

Considérons le Wronskien de f et g :

$$W = \det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix}.$$

Comme f et g sont linéairement indépendantes, $W(t)$ ne s'annule pas. On a :

$$W(\alpha) = -f'(\alpha)g(\alpha) \quad \text{et} \quad W(\beta) = -f'(\beta)g(\beta).$$

On peut toujours supposer $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ de sorte que $f'(\alpha) > 0$ et $f'(\beta) < 0$. Comme W est de signe constant (c'est une fonction continue qui ne s'annule pas) on en déduit que $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont de signe opposés et g a au moins un zéro dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$. Si g avait deux zéros distincts dans cet intervalle, le même raisonnement montrerait que f aurait au moins un zéro dans $I =]\alpha, \beta[$ ce qui contredit l'hypothèse : g a donc un et un seul zéro dans I.

La fonction

$$H(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$$

est dérivable de dérivée $H't() = f(t)g(t)\,(p(t) - q(t))$. Si g ne s'annule pas sur I on peut supposer f positive sur I et g strictement positive. H est donc décroissante et $H(\alpha) \geqslant H(\beta)$. Mais $H(\alpha) < 0$ et $H(\beta) > 0$ d'où une contradiction.

Ceci va nous permette, dans certains cas, de comparer les solutions de $y" + py = 0$ à celles de $y" + M^2y = 0$. Soit $g(t) = \sin(Mt + \varphi)$: c'est une solution non triviale $y" + M^2y = 0$ ayant pour zéros les réels $\dfrac{\pi - \varphi}{M} + \dfrac{k\pi}{M}$. Ce qui précède montre alors que si f est solution de $z" + qz = 0$ avec $q \leqslant M^2$ et si t_0, t_1 sont deux zéros consécutifs de f tels que $|t_1 - t_0| < \frac{\pi}{M}$, il existe φ tel que $g(\alpha) \neq 0$ et $g(\beta) \neq e0$ et g ne s'annule pas sur $[t_0, t_1]$ ce qui contredit le résultat précédent. Lorsque $q(t) \geqslant M^2$, un raisonnement analogue (il suffit d'échanger les rôles de f et g) montre que tout intervalle de longueur $\frac{\pi}{M}$ contient un zéro de f.

Considérons maintenant l'équation $y" + py = 0$ où p est une fonction continue *intégrable* sur $\mathbb{R}^+$. Si f est une solution *bornée* de l'équation, $-qf$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ de sorte que

$$f'(t) = f'(t_0) + \int_{t_0}^{t} p(u)f(u)du$$

admet une limite finie quand t tend vers l'infini. Si cette limite était non nulle

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(u)du$$

ne saurait être bornée. On a donc $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Si g est une autre solution *bornée* de l'équation, le wronskien $fg' - f'g$ a pour limite 0 en plus l'infini. Ce Wronskien étant constant, il est nul : f et g ne sont donc pas linéairement indépendantes. L'espace des solutions étant de dimension 2, l'équation possède des solutions non bornées.

3. Cas général

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie E muni d'une norme $\| \ \|$. Dans tout ce qui suit nous considérons l'équation différentielle

$$y' = f(t, y) \tag{3.1}$$

où f est définie et continue sur $I \times U$. On munit $\mathbb{R} \times E$ de la norme produit.

DÉFINITION 3.1. — *Soient t_0 un point de I et y_0 un point de U. On dit que le cylindre*

$$C(t_0, y_0) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}(y_0, R)$$

est un cylindre de sécurité *relativement à* (t_0, y_0) *si*

(1) *$[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \subset I$ et $\bar{B}(y_0, R) \subset U$*

(2) *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $(t, y) \in C(t_0, y_0)$ on ait $\|f(t, y)\| \leqslant M$ et $\alpha \leqslant \frac{R}{M}$.*

Lemme 3.2. — *Si f est continue sur $\Omega = I \times U$, pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$ il existe un cylindre de sécurité relatif à (t_0, y_0).*

Démonstration. — En effet, f étant continue sur Ω, pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$ il existe un voisinage $[t_0-\beta, t_0+\beta] \times B(y_0, R_1)$ de (t_0, y_0) sur lequel f est bornée par une constante $M > 0$. Il suffit alors de prendre $\alpha < \inf\{\beta, \frac{R}{M}\}$. □

Si $C = C(t_0, y_0)$ est un cylindre de sécurité, et si u est une solution de (3.1) telle que $u(t_0) = y_0$ alors

$$v(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\left(s, u(s)\right)\, ds$$

vérifie $\|v(t) - y_0\| \leqslant M|t - t_0| \leqslant R$ pour tout $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ autrement dit $v(t) \in \bar{B}(y_0, R)$ pour tout $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

Théorème 3.3. — **[Cauchy Lipschitz]** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de E. Si $f : (t, y) \in I \times U \to f(t, y) \in E$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times U$ alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$ il existe un cylindre de sécurité $C = [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times B(y_0, R)$ et une unique fonction u dérivable sur $J = [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ solution de (1) telle que $u(t_0) = y_0$.*

Démonstration. — Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in U$. Si (J, y) est une solution qui vérifie $y(t_0) = y_0$ alors y est continue sur J et vérifie

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

On pose $u_0 = y_0$ et, pour tout $t \in J$,

$$u_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s))\, ds.$$

On vérifie sans peine que u_1 est définie sur J et à valeurs dans $\bar{B}(y_0, R)$. De plus,

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leqslant M|t - t_0|.$$

La fonction $t \mapsto u_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_1(s))\, ds$ vérifie

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, u_1(s)) - f(s, u_0(s))|\, ds \right|.$$

Si M_1 est la borne supérieure de la différentielle de f sur C l'inégalité des accroissements finis montre que

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \leqslant M_1 \left| \int_{t_0}^{t} M|s - t_0|\, ds \right| \leqslant M M_1 \frac{|t - t_0|^2}{2!}$$

sur J. On définit alors par récurrence la suite u_n par

$$u_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, u_{n-1}(s)\right)\, ds.$$

puis on montre que pour tout entier n et tout $t \in J$

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leqslant M M_1^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!}.$$

La série de terme général $M_1^{n-1}\frac{\alpha^n}{n!}$ étant convergente, la suite (u_n) est une suite de Cauchy sur J. Un passage à la limite montre alors que u est solution du problème de Cauchy proposé.

Pour l'unicité on peut raisonner comme dans le cas linéaire. $\square$

Remarque 3.4. — La condition f de classe $\mathcal{C}^1$ (*cf.* le programme) et est très facilement remplacée par la condition « f est localement lipschitzienne par rapport à y ». En effet, il est facile de construire en (t_0, y_0) un cylindre de sécurité sur lequel f est lipschitzienne par rapport à la seconde variable de rapport k. Il suffit alors de remplacer la constante M_1 par k dans la démonstration du théorème 3.3 pour conclure.

L'unicité permet alors de définir alors la notion de *solution maximale i.e.* de solution définie sur un intervalle J et non prolongeable à un intervalle $J' \supset J$. En effet,

Lemme 3.5. — *Soient (J_1, u) et (J_2, v) deux solutions de (3.1). S'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$) tel que $u(t_0) = v(t_0)$ alors u et v coïncident sur $J_1 \cap J_2$.*

Démonstration. — C'est un résultat de connexité : soit
$$J = \{t \in J_1 \cap J_2 \ ;\ u(t) = v(t)\}.$$
J est une partie non vide $J_1 \cap J_2$. C'est un fermé puisque u et v sont continues. Le théorème de Cauchy (unicité) montre d'autre part que c'est un ouvert. $J_1 \cap J_2$ étant connexe, $J = J_1 \cap J_2$. $\square$

Remarques 3.6. — Il résulte du théorème de Cauchy qu'une solution maximale est définie sur un *ouvert* de I.

Deux trajectoires maximales sont soit disjointes soit confondues

Si $E = \mathbb{R}$ Les trajectoires sont ordonnées (par $y(t_0)$)

Lemme 3.7. — *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t - 2\alpha, t + 2\alpha] \times \bar{B}(y_0, 2R)$ avec $\alpha > 0$ et $R > 0$. Il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $(t_1, y_1) \in [t - \alpha, t + \alpha] \times \bar{B}(y_0, R)$ la solution maximale u du problème de Cauchy au point (t_1, y_1) soit définie sur un intervalle contenant $[t_1 - \tau, t_1 + \tau]$.*

Démonstration. — Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 3.3 en remarquant que $\bar{B}(y_1, R) \subset \bar{B}(y_0, 2R)$. $\square$

3.1. Un lemme de comparaison

Proposition 3.8. — **[Lemme de comparaison]** *Soit $g\ : [t_0, t_1[\times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction* continue *et soit $\rho\ : I = [t_0, t_1[\to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable vérifiant*
$$\rho'(t) = g(t, \rho(t))$$
pour tout $t \in I$. Si $\gamma\ : I \to \mathbb{R}^n$ vérifie $\|\gamma'(t)\| < g(t, \|\gamma(t)\|)$ pour tout $t \in I$ et si $\|\gamma(t_0)\| \leqslant \rho(t_0)$ alors, pour tout $t \in I$, on a
$$\|\gamma(t)\| \leqslant \rho(t). \tag{3.2}$$

Démonstration. — D'après l'hypothèse on a $\|\gamma'(t_0)\| < \rho'(t_0)$ et $\|\gamma(t_0)\| \leqslant \rho(t_0)$; un développement limité à l'ordre 1 donne :
$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$$
avec $\lim \varepsilon(t)_{t_0} = 0$. Si $\|\gamma'(t_0)\| = \rho'(t_0) - \mu$ avec $\mu > 0$ on a donc
$$\|\gamma(t)\| < \rho(t_0) + |t - t_0|(\rho'(t_0) - \mu) + |t - t_0|\|\varepsilon(t)\|$$

Or $\rho(t) = \rho(t_0)+(t-t_0)\rho'(t_0)+(t-t_0)\eta(t)$ avec $\eta(t) \to 0$ quand $t \to t_0$ de sorte que $\|\gamma(t)\| < \rho(t)$ pour t assez proche de t_0 dans I.

Supposons qu'il existe $t \in I$ tel que $\|\gamma(t)\| \geqslant \rho(t)$ et soit $t_2 = \inf\{t \in I \ \|\gamma(t)\| = \rho(t)\}$. Sur $J =]t_0, t_2[$ on a $\|\gamma(t)\| < \rho(t)$. De plus,

$$\|\gamma'(t_2)\| < g\left(t_2, \|\gamma(t_2)\|\right) = g\left(t_2, \rho(t_2)\right) = \rho'(t_2). \tag{3.3}$$

un développement limité à l'ordre 1 en t_2 donne pour $t \in]t_0, t_2[$

$$\|\gamma(t)\| \geqslant \|\gamma(t_2)\| - (t_2 - t)\|\gamma'(t_2)\| + o(t_2 - t)$$

et

$$\rho(t) = \rho(t_2) - (t_2 - t)\rho'(t_2) + o(t_2 - t) > \rho(t_2). - (t_2 - t)\|\gamma'(t_2)\| + o(t_2 - t)$$

ce qui contredit (3.3)[Remarquer que, d'après (3.3), $\rho'(t_2) > 0$]. □

3.2. Applications

La proposition précédente, souvent utile, permet de démontrer certaines formes du lemme de Grönwall de façon naturelle (le lemme de Grönwall est en fait un lemme de comparaison).

Proposition 3.9 (Grönwall 1). — *Soient a et b deux fonctions continues sur $I = [0, T]$ avec $a \geqslant 0$ et b* dérivable. *Si une fonction u continue à valeurs réelles vérifie*

$$u(t) \leqslant b(t) + \int_0^t a(s)u(s)ds$$

alors pour $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} u(t) &\leqslant b(t) + \int_0^t b(s)a(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds \\ &\leqslant b(0)\exp\left(\int_0^t a(u)du\right) + \int_0^t b'(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Démonstration. — On va comparer u à la solution de l'équation différentielle $\rho'(t) = b'(t) + a(t)b(t)$ telle que $\rho(0) = b(0)$. Cette équation est linéaire et la solution égale à $b(0)$ en 0 –que l'on obtient par exemple par variation de la constante– est donnée par

$$\rho(t) = b(0)\exp\left(\int_0^t a(u)du\right) + \int_0^t b'(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds$$

et la proposition (3.8) permet de conclure. □

Dans le cas d'une inégalité différentielle $u'(t) \leqslant a(t)u(t) + b(t)$ on a une preuve bien plus simple lorsque u est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, on peut alors écrire

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t) - c(t)$$

où c est une fonction *positive* et continue (différence de fonctions continues). La fonction u est donc solution d'une équation différentielle linéaire et

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) + \int_{t_0}^t (b(s) - c(s))\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds \\ &\leqslant u(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) + \int_{t_0}^t b(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds. \end{aligned}$$

3.2.1. Exemples

(1) Soit $f : I \times U \to E = \mathbb{R}^n$ une fonction k lipschitzienne sur un cylindre $J \times V$. On dit que γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux est une solution ε-approchée si pour tout $t \in J$ on a

$$\|\gamma(t) - f(t, \gamma(t)\| \leqslant \varepsilon. \tag{3.5}$$

La méthode d'Euler fournit des solutions ε-approchées affines par morceaux.

Soient alors γ_1 une solution ε_1 -approchée sur J et γ_2 une solution ε_2-approchée sur J telles que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$. Posant $\gamma(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$ on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|\gamma'(t)\| < \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k\|\gamma(t)\|.$$

Si $\rho(t)$ est solution de $\rho'(t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k\rho(t)$ avec $\rho(0) = 0$ on a donc $\|\gamma(t)\| \leqslant \rho(t)$ pour tout t d'où, en faisant tendre ε vers 0, :

$$\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| \leqslant (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

(On obtient directement le résultat sur $t \in J, t > t_0$ puis on traite le cas $t < t_0$ ce qui donne la valeur absolue). Prenant $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ on obtient l'unicité dans le théorème de Cauchy Lipschitz. De plus, si on prend une suite de réels strictement positifs (ε_n) qui tend vers 0, on voit que toute suite de solutions (ε_n)-approchées converge uniformément sur tout compact. cette dernière remarque permet de démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'aide de solutions approchées.

(2) On considère l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ où $f\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue, localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. S'il existe des constantes positives a et b telle que $\|f(t, y)\| \leqslant a\|y\| + b$, les solutions maximales sont globales ($i;e.$ définies sur $\mathbb{R}$). En effet, si v est une solution maximale définie sur $]\alpha, \beta[$, on a pour $t > t_0$,

$$\|v(t)\| \leqslant \|v(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, v(s))\|ds \leqslant \|v_0\| + b(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} a\|v(s)\|ds.$$

Le lemme de Grönwall (3.9) montre alors que $\|v\|$ est majorée sur l'intervalle $[t_0, \beta[$ par

$$\|v_0\| \exp(a(\beta - t_0)) + \frac{b}{a}\left(e^{a(\beta - t_0} - 1\right)$$

si $a \neq 0$ et par $\|v_0\| + b(\beta - t_0)$ sinon. On montre de même que $\|v\|$ est bornée sur $]-\alpha, t_0]$. Prenant une suite t_n qui converge vers β on peut en extraire une sous-suite (θ_k) telle que θ_k converge vers β et $v(\theta_k)$ converge vers un point z. La solution se prolonge (*cf.* le théorème (4.1)) ce qui contredit le caractère maximal de v.

(3) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $f\ : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, $a\ : I \to \mathbb{R}$ et $b\ : I \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}$ on ait

$$\langle f(t, x), x\rangle \leqslant a(t)\|x\|^2 + b(t).$$

Soit $\gamma\ :]t^-, t^+[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$. Montrer que $t^+ = \sup I$.

La fonction $u \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle u, u\rangle$ est dérivable en tout point (forme bilinéaire) de sorte que le théorème de dérivation des fonctions composées montre que

$$\frac{d}{dt}r(t) = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle \leqslant 2a(t)r(t) + 2b(t).$$

Le lemme de Grönwall (on a ici une méthode directe en remarquant que $r'(t) = 2a(t)r(t) + 2b(t) - c(t)$ avec $c \geqslant 0$ et c continue : on peut intégrer directement cette équation pour en déduire un emajoration de r). Comme r est majorée sur $]t_0, t^+[$, il en est de même de $\|y'\|$ puisque $\|y'\| = \|f(t, y)\| \leqslant a(t)r(t) + b(t)$. L'intégrale $\int_{t_0}^{t+} y'(u)du$ est donc convergente ce qui montre que $y(t)$ a une limite ℓ quand $t \to t^+$. On peut donc prolonger en (t_+, ℓ) ce qui contredit la maximalité de f. La continuité de f suffit (Cauchy-Arzéla hors programme).

4. Le théorème des bouts

Théorème 4.1. — **[Théorème des bouts]** *Soit y une solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

définie sur $J \subset I$. Si $\sup J < \sup I$ *pour tout compact $K \subset U$ il existe $t_1 \in J$ tel que $y(t_1) \notin K$.*

On a un résultat analogue si $\inf J < \inf J$.

Démonstration. — Supposons $\beta = \sup J < \sup I$ et raisonnons par l'absurde. S'il existait un compact K et une suite t_n tendant vers β telle que $y(t_n) \in K$ pour tout n, quitte à en extraire une sous-suite, on pourrait supposer qu'elle converge vers $z \in K$. Soient $r > 0$ et $R > 0$ tels que f soit bornée et Lipschitzienne par rapport à y dans $[\beta - 2r, \beta + 2r] \times \bar{B}(z, 2R)$. Alors , il existe $\tau < r$ tel que pour tout $(t0, z0) \in [\beta - \tau, \beta + \tau] \times \bar{B}(z, R)$ la solution maximale du problème de Cauchy est définie sur un intervalle contenant $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$. Or, pour n assez grand, $(t_n, y(t_n)) \in [\beta - \tau, \beta + \tau] \times B(z, R)$, et $t_n + \tau > \beta$. Ceci contredit le fait que y soit une solution maximale. □

Lemme 4.2 (Grönwall). — *Soit φ, a et b des fonctions continues de $I = [0, T]$ à valeurs réelles. Si $a \geqslant 0$ et $\varphi(t) \leqslant \int_0^t a(s)\varphi(s)ds + b(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ alors*

$$\varphi(t) \leqslant \int_0^t a(s)b(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds + b(t).$$

Démonstration. — Poser $v(t) = \int_0^t a(s)\varphi(s)ds$. On a $v' = a\varphi \leqslant a(v + b)$. On a donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-\int_0^t a(u)du\right) \cdot v(t)\right) \leqslant a(t)b(t)\exp\left((-\int_0^t a(u)du\right).$$

Il suffit alors d'intégrer pour conclure.

□

4.1. Applications

Le lemme de Grönwall sert souvent à obtenir des estimations *a priori* des solutions d'une équation différentielle. Le théorème des bouts permet alors de conclure à la globalité des solutions.

(1) Si f est continue et bornée sur $I \times E$ et si $y' = f(t, y)$, y est une solution globale. En effet $\|y'\| \leqslant M$ de sorte que $\|y(t)\| \leqslant \|y(t_0)\| + M|t - t_0|$.

(2) Si $\|f(y)\| \leqslant a|y| + b$ les solutions de $y' = f(y)$ sont globales. En effet on peut majorer $|y(t)|$ par le lemme de Grönwall puis appliquer le théorème des bouts.

(3) Par contre dans le cas de $y' = -y^2$ il n'y a pas de solution globale telle que $y(0) \neq 0$ (expliciter les solutions).

4.2. Barrières

Soit $u : J \subset I \to U$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que u est une *barrière supérieure* pour (3.1) si $u'(t) \geqslant f(t, u(t))$ pour tout $t \in J$. On dit que u est une *barrière inférieure* pour (3.1) si $u'(t) \leqslant f(t, u(t))$. Soit u une barrière supérieure. Si y est une solution de (3.1) telle que $y(t_0) < u(t_0)$ alors pour tout $t \in J$ on a $y(t) \leqslant u(t)$. Sinon, il existerait $t_1 > t_0 \in J$ tel que $y(t_1) > u(t_1)$ et l'ensemble $X = \{t \in I; t_0 \leqslant t \leqslant t_1, y(t) \leqslant u(t)\}$ est non vide, majoré par t_1 et *fermé* puisque y et u sont continues : il admet donc une borne supérieure $t^* \in X$. On a $y(t_1) \leqslant u(t_1)$ et $y(t) > u(t)$ pour $t > t^*$. La continuité de y et de u montre alors que $y(t^*) = u(t^*)$. Mais, f étant lipschitzienne par rapport à la seconde variable, il existe $t_2 \in K = [t^*, t_1[$ et un réel $C > 0$ tel que pour tout $t_i n K$ on ait

$$|f(t, u(t)) - f(t, y(t))| \leqslant C|u(t) - y(t)|.$$

On a alors $y'(t) - u'(t) \leqslant C(y(t) - u(t))$ ce qui entraîne que $y - u$ est négative sur K (3.9). On obtient donc une contradiction. Pour les barrières inférieures on fait une démonstration anallogue. Si u est une barrière supérieure et v une barrière inférieure sur J alors $A = \{(x, y) de J \times U; u(x) \leqslant y \leqslant v(x)\}$ est un entonnoir : soit y une solution de (3.1), si $t_0 \in J$ et $(t_0, y(t_0)) \in A$ alors pour tout $t \in J$ on a $(t, y(t)) \in A$. La solution est *piégée* dans l'entonnoir.

Exemple 4.3. — Considérons l'équation différentielle $y' = y^2(1 - 2ty)$. La fonction $f(t, y) = y^2(1 - 2ty)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus $v(t) = \frac{1}{x}$ est une barrière supérieure et $v(x) = \frac{1}{2x}$ une barrière inférieure.

Exemple 4.4. — Prenons maintenant l'équation différentielle $y' = y - y^2$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ on peut donc appliquer le théorème de Cauchy. On a $y' = y(1 - y)$. $y = 0$ et $y = 1$ sont des solutions globales. De plus, si $y(t_0) \in]0, 1[$ puisque les trajectoires sont disjointes ou confondues, on a $y(t) \in]0, 1[$ pour tout $t \in J$. Le théorème des bouts montre donc que y est une solution globale. Sur $\mathbb{R}$ la solution y est croissante de sorte que si y a une limite $y_0 \neq 1$ sa dérivée a aussi une limite ℓ puisque $y' = y - y^2$. Mais comme $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(u)du$ cette intégrale a une limite finie en $+\infty$. Comme $y' \to \ell$ cela entraîne que $\ell = 0$ puis que $\lim y = 1$. De même $y \to 0$ quand $t \to -\infty$. Si $y \neq 0$, le changement $z = 1/y$ permet d'intégrer l'équation étudiée puisque $z' = 1 - z$. $z = 1$ est solution et la solution générale est $z = 1 - Ce^{-t}$ de sorte est de la forme $y = 1/(1 - Ce^{-t})$ sur un intervalle convenable.

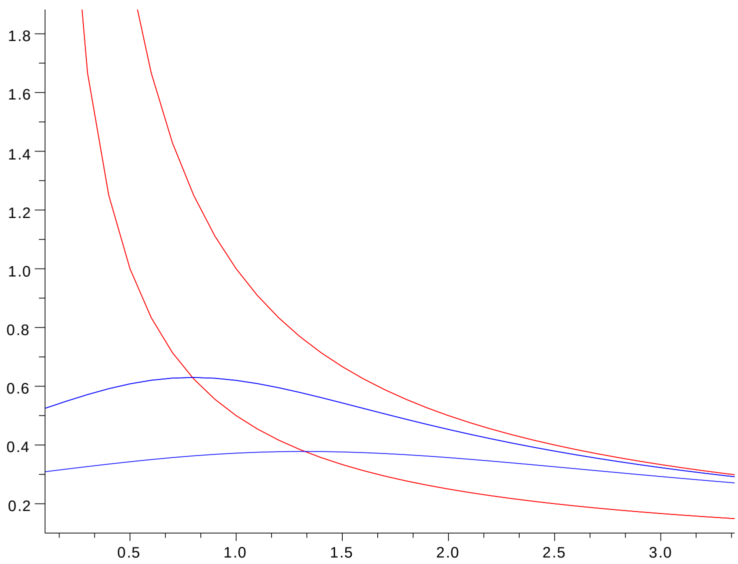

FIGURE *1. Un entonnoir.*

Exercice 4.4 Montrer qu'il existe une infinité de solution maximales de $y' = y^2$ ayant même condition initiale. Expliquer.

Exercice 4.5 Montrer que $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t|t|$ sont solutions de l'équation différentielle $y' = \sqrt{|y|}$ avec la même condition initiale $y(0) = 0$. Montrer directement que $y \mapsto \sqrt{|y|}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0 (regarder ce qui se passe sur un intervalle de la former $[0, t_0]$).

Exercice 4.6 On considère l'équation différentielle $x' = x^2 - t$ et $D_0 = \{(t, x)\ ;\ x^2 - t < 0\}$. Montrer que toute solution maximale telle que $(t_0, x(t_0) \in D_0$ est définie sur $[t_0, +\infty[$. Montrer que la courbe intégrale reste dans D_0 et que $x(t) \sim -\sqrt{t}$ au voisinage de $+\infty$.

S'il existe $t > t_0$ tel que $x^2(t) - t \geqslant 0$, soit $t_1 = \inf\{t \in [t_0, \beta[\ ;\ x^2 - t \geqslant 0\}$ (la solution maximale étant définie sur $J =]\alpha, \beta[$ avec $t_0 \in J$). Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, en étudiant $x(t) - \sqrt{t}$ on relève une contradiction. On fait de même si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$. On a donc $-\beta \leqslant x' \leqslant 0$ sur $[t_0, \beta[$: x' est intégrable sur cet intervalle ce qui montre que x a une limite finie en β. Il suffit alors de prolonger (Cauchy-Lipschitz) pour conclure.

5. Liste des leçons sur les équations différentielles en 2013

(1) Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients continus (224).
(2) Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples (225).
(3) Approximation des solutions d'une équation différentielle (253).
(4) Exemples d'étude et de résolution d'équations différentielles scalaires (428).
(5) Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires (429).
(6) Exemples d'équations différentielles issues des sciences physiques ou chimiques (430).
(7) Exemples de systèmes différentiels linéaires en dimension 2 ou 3. Allure des trajectoires (441).
(8) Exemples de résolution exacte et de résolution approchée d'équations différentielles scalaires (445).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Hervé, *Les fonctions analytiques*, P.U.F.
[2] J. Lelong-Ferrand & J.-M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques tome 2*, Dunod.
[3] ———, *Cours de mathématiques tome 4*, Dunod.
[4] J. Voedts, *Cours de mathématiques mp-mp**, Ellipses.

Index