SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers *f*. Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite $\left(f_n \circ f_n\right)$.

2. **a.** Soit (f_n) une suite de fonctions *k*-lipschitziennes, convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction *f*. Prouver que *f* est *k*-lipschitzienne, et que la convergence est uniforme.

b. Le résultat précédent subsiste-t-il si les fonctions f_n sont juste supposées lipschitziennes ?

3. Théorème de Dini : Soit *K* un compact d'un espace vectoriel normé *E*, et (f_n) une suite croissante de fonctions numériques continues sur *K*, convergeant simplement vers une fonction continue *f*. Le théorème de Dini affirme que cette convergence est uniforme.

a. Prouver qu'une intersection décroissante de fermés non vides inclus dans *K* est non vide.

b. On fixe $\varepsilon > 0$, et on pose $K_n = \left\{x \in K \ / \ f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon\right\}$. Prouver que la suite (K_n) est une suite décroissante de fermés, d'intersection vide.

c. Conclure.

4. On note *E* l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, que l'on munit de la norme $\| \|_\infty$ de la convergence uniforme. Soit (f_n) une suite de Cauchy d'éléments de *E*.

a. Prouver que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une certaine fonction *f*.

b. Prouver que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

c. Prouver que *E* est complet.

5. Soit (f_n) une suite de fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, convergeant simplement vers une certaine fonction *f*.

a. On suppose toutes les f_n T-périodiques. Prouver que *f* est T-périodique.

b. On suppose que, pour tout entier *n*, la fonction f_n est T_n-périodique, et que la suite (T_n) converge vers une certaine limite non nulle *T*. Quelles sont les hypothèses naturelles à imposer permettant d'affirmer que *f* est T-périodique ?

c. On suppose que l'on se place sous les hypothèses inventées dans la question **b.**, mais on ne suppose plus la suite (T_n) convergentes. En revanche, on suppose que les T_n sont toutes dans un même segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a > 0$. Prouver que *f* est périodique.

d. Prouver que la conclusion de la question **c.** reste vraie en supposant que les T_n sont toutes dans un même intervalle de la forme $]0,b]$.

e. On pose, pour *x* réel :

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos \frac{x}{n}}{2^n} \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{x}{n}}{2^n}.$$

Prouver que chaque fonction S_N est périodique, que la suite $(S_N)_N$ converge uniformément vers la fonction continue *S*, mais que *S* n'est pas périodique.

6. On définit par récurrence sur $I=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ une suite de fonctions en posant $f_0=0$ et, pour $n\geq 0$:

$$f_{n+1}(x)=\frac{x^3}{3}+\int_0^x f_n^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a. Prouver que $|f_n(x)|\leq\frac{5}{6}$ pour tout x de I.

b. Prouver que pour tout $n\geq 1$, on a $\|f_{n+1}-f_n\|_\infty\leq\frac{5}{6}\|f_n-f_{n-1}\|_\infty$

c. Qu'en déduire concernant la série de fonctions $\sum(f_{n+1}-f_n)$?
Prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur I. Soit f sa limite.

d. Prouver que f est une solution sur I de l'équation différentielle $y'=x^2+y^2$ satisfaisant à $f(0)=0$.

7. Soit $\sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, f sa fonction somme définie sur le disque $D(0,R)$ du plan complexe. Soit a un élément de $D(0,R)$, et r un réel tel que $|a|<r<R$.

a. Pour θ dans $[0,2\pi]$, représenter $f(re^{\mathrm{i}\theta})$ et $\dfrac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-\mathrm{i}\theta}}$ sous forme de séries et en déduire un développement en série de $g(\theta)=\dfrac{f(re^{\mathrm{i}\theta})}{1-\frac{a}{r}e^{-\mathrm{i}\theta}}$.

b. Prouver que la convergence de la série obtenue est normale sur $[0,2\pi]$, et en déduire la formule intégrale de Cauchy

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{\mathrm{i}\theta})}{1-\frac{a}{r}e^{-\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta\,.$$

c. Soit réciproquement une fonction continue f sur $D(0,R)$, qui pour tous a et r vérifiant $|a|<r<R$, satisfait à la formule intégrale précédente.

Grâce au développement en série de $\dfrac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-\mathrm{i}\theta}}$, puis à une intégration terme à terme bien justifiée, prouver que f est développable en série entière sur $D(0,R)$.

d. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $D(0,R)$, développables en série entière sur ce disque, et convergeant uniformément sur tout disque $D(0,r)$ avec $r<R$, vers une fonction f. Prouver que f est définie et continue sur $D(0,R)$, et qu'elle vérifie, pour tous a et r vérifiant $|a|<r<R$, la formule intégrale de Cauchy. Conclure.

e. Le résultat obtenu à la question **d.** subsiste-t-il si les fonctions f_n sont développables en série entière sur l'intervalle $]-R,R[$ de $\mathbb{R}$ et convergent uniformément vers une fonction f sur tout segment $[-r,r]$ inclus dans $]-R,R[$?

8. Division des fonctions $\mathcal{C}^\infty$

a. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant $f(0)=0$. On pose, pour $x\neq 0$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Prouver que, convenablement prolongée en 0, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (on écrira $f(x)$ sous forme d'une intégrale).

b. Pour des fonctions telles que $f(x)=\sin x$, $f(x)=\ln(1+x)$ ou $f(x)=\mathrm{e}^x-1$, comment peut-on justifier ce résultat de manière beaucoup plus élémentaire ?

9. Théorème de Poincaré

f et g désignent deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a. On suppose l'existence d'une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$ (je rappelle que, dans ce cas, on dit que la forme différentielle $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ est *exacte*). Prouver que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. On suppose réciproquement que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$. Prouver l'existence d'une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = g$.

10. Formule de Stirling pour la fonction Gamma

a. Grâce au changement de variable $y = x + t\sqrt{x}$ dans l'expression $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} y^x \mathrm{d}y$, donner une expression pour $x > 0$ de $\Gamma(x+1)$ sous la forme $\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$ où f est la fonction nulle pour $t \leq -\sqrt{x}$ et à préciser sinon.

b. Étudier, à t fixé, la limite de $f(t,x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Étudier la fonction $u \mapsto \frac{\ln(1+u) - u}{u^2}$.

d. Si $x \geq 1$, prouver que $0 \leq f(t,x) \leq (1+t)\mathrm{e}^{-t}$ pour tout réel positif t.

e. Montrer que pour tout t de $]-\sqrt{x}, 0]$, on a $0 < f(t,x) \leq \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

f. En déduire la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \underset{x\infty}{\sim} \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{2\pi x}\,.$$

11. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de complexes telles que la suite $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ tende vers 0 pour tout réel x.

a. Prouver que la suite (a_n) tend vers 0.

b. On pose $I_n = \int_0^{\pi} |b_n \sin nt|^2 \,\mathrm{d}t$ et on suppose la suite (b_n) bornée. Déterminer la limite de la suite (I_n), et en déduire que (b_n) tend vers 0.

c. Dans le cas général, on pose $\beta_n = \inf(|b_n|, 1)$. Prouver que la suite (β_n) tend vers 0 et conclure.

d. Quelle raison mathématique profonde explique que le résultat à prouver soit nettement plus délicat pour la suite (b_n) que pour la suite (a_n) ?

12. On rappelle que l'on définit une norme sur l'espace E des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ en posant, pour $f \in E$:

$$n_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

On désigne par E_1 le sous-espace de E constitué des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $f \in E_1$, on pose :

$$\|f\| = |f(0)| + n_\infty(f').$$

On rappelle par ailleurs que pour $f \in E_1$, la longueur de la courbe représentative de *f* est donnée par la formule intégrale suivante :

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Prouver que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1.

b. Prouver que l'on a $n_\infty(f) \leq \|f\|$ pour tout élément *f* de E_1.

c. Prouver que les normes n_∞ et $\|\ \|$ ne sont pas équivalentes sur E_1 (envisager les applications $p_n : t \mapsto t^n$).

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin(n\pi x)$.

d. Prouver que la suite (f_n) converge vers la fonction nulle au sens de la norme n_∞.

e. On note l_n la longueur de la courbe représentative de f_n. Prouver l'inégalité $l_n \geq \sqrt{n}\,\dfrac{\pi}{2}$ (on pourra utiliser l'inégalité $|\cos u| \geq \cos^2 u$).

f. En déduire que si l'on munit l'espace E_1 de la norme n_∞, l'application $f \mapsto L(f)$ n'est pas continue.

Soit f_0 un élément fixé de E_1.

g. Prouver que pour tout élément *f* de E_1 vérifiant $\|f - f_0\| \leq 1$, on a :

$$|L(f) - L(f_0)| \leq \left(2\|f_0\|+1\right)\|f - f_0\|.$$

h. Que peut-on en déduire concernant l'application $f \mapsto L(f)$ si l'on munit E_1 de la norme $\|\ \|$?

On pose, pour *t* élément de $]0,1]$, $g(t) = \dfrac{1}{t}\sin\dfrac{1}{t}$.

i. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ est convergente sans être absolument convergente.

j. Prouver que *g* n'est pas sommable sur $]0,1]$.

k. On pose, pour *x* élément de $]0,1]$, $f(x) = \displaystyle\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t$. Prouver que *f* possède une limite finie en 0. On peut donc prolonger *f* par continuité en 0, et ce prolongement sera encore noté *f*.

l. Prouver que *f* est continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$.

m. Prouver que malgré l'extrême régularité de *f*, son graphe possède une longueur infinie.