

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On note :

- \mathbb{N} l'ensemble des nombres entiers naturels ;
- \mathbb{Z} l'ensemble des nombres entiers relatifs ;
- \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

Les lettres p et q désignant des nombres entiers relatifs, on note : $\llbracket p, q \rrbracket$ l'ensemble des nombres entiers relatifs compris (au sens large) entre les nombres p et q , autrement dit : $\llbracket p, q \rrbracket = \{m ; m \in \mathbb{Z} / p \leq m \text{ et } m \leq q\}$.

Par ailleurs, on note :

- \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

et, si (k, l) appartient à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$:

E_{kl} la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k -ième ligne et la l -ième colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. On rappelle que la famille $(E_{kl})_{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note enfin : $M = (m_{ij})$, ou $M = (m_{i,j})$ en cas d'ambiguïté, la matrice

$$M = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} m_{ij} E_{ij}.$$

La lettre K désignant un réel, on définit les ensembles :

- $L_K = \{M ; M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{ij} = K\}$;
- $L = \bigcup_{K \in \mathbb{R}} L_K$;
- $C_K = \{M ; M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{ij} = K\}$;
- $C = \bigcup_{K \in \mathbb{R}} C_K$.

Une matrice $M = (m_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite matrice *magique* d'ordre n lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\{m_{ij} ; (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\} = \llbracket 1, n^2 \rrbracket \quad \mathbf{P}_1$$

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad M \in L_K \cap C_K \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n m_{kk} = \sum_{k=1}^n m_{k, n+1-k} = K \quad \mathbf{P}_2$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des matrices appartenant à $L \cap C$ et des matrices magiques d'ordre n , avec, notamment, une construction de certaines d'entre elles dans le cas où n est impair.

Les cinq parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Montrer que, si M est une matrice magique d'ordre n , le réel K dont la propriété \mathbf{P}_2 affirme l'existence vaut nécessairement $\frac{n(n^2 + 1)}{2}$.

Dans toute la suite du problème, on note $K_n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$.

PARTIE I : ETUDE DES MATRICES MAGIQUES D'ORDRES 2 ET 3

I.1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice magique d'ordre 2.

I.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice magique d'ordre 3.

I.2.a. Établir l'inclusion de l'ensemble $\{1, 9\}$ dans l'ensemble $\{a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}\}$.

I.2.b. En déduire l'ensemble des matrices magiques d'ordre 3.

PARTIE II : ÉTUDE DE L'ESPACE VECTORIEL $L \cap C$

II.1.

II.1.a. Montrer que L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il est engendré par la famille de matrices $(E_{ij} - E_{in})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$. Préciser la dimension de L_0 .

II.1.b. Soit K un réel. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - KI_n$ appartient à L_0 .

II.1.c. En déduire que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

II.2.

II.2.a. Montrer que, quelle que soit la matrice $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} m_{ij} (E_{ij} - E_{in})$ appartenant à L_0 , M appartient à C_0 si et seulement si, pour tout j appartenant à $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$.

II.2.b. En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$ (après avoir succinctement justifié que $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel).

II.3.

II.3.a. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.

II.3.b. En déduire la dimension de l'espace $L \cap C$.

PARTIE III : EXEMPLE DE GROUPE OPÉRANT SUR L'ENSEMBLE DES MATRICES MAGIQUES D'ORDRE n

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que les vecteurs \vec{AB} et \vec{u} d'une part, \vec{BC} et \vec{v} d'autre part, soient colinéaires.

On note \mathcal{I} l'ensemble des isométries de \mathcal{E} qui laissent le carré $ABCD$ globalement invariant. On note Ω le point de \mathcal{E} vérifiant $\vec{O\Omega} = -\frac{n+1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ et \mathcal{R}' le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

III.1.

III.1.a. Soit f un élément de \mathcal{I} . Montrer qu'il existe un couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ appartenant à $\{-1, 1\}^2$ tel que, pour tout point N de \mathcal{E} de coordonnées (x, y) dans le repère \mathcal{R} , les coordonnées (x', y') du point $f(N)$ dans le repère \mathcal{R} vérifient :

$$\begin{cases} x' = \varepsilon_1 x \\ y' = \varepsilon_2 y, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = \varepsilon_1 y \\ y' = \varepsilon_2 x. \end{cases}$$

Reconnaître toutes les isométries du plan \mathcal{E} ainsi définies.

III.1.b. Soit N le point de \mathcal{E} de coordonnées (X, Y) dans le repère \mathcal{R}' . Pour chaque élément f de \mathcal{I} , exprimer les coordonnées (X', Y') du point $f(N)$ dans le repère \mathcal{R}' en fonction de X et de Y .

III.2. Soit f un élément de \mathcal{I} . On considère l'application φ de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 qui, à un couple (s, t) de réels, associe le couple des coordonnées dans le repère \mathcal{R}' de l'image par f^{-1} du point de coordonnées (s, t) dans ce même repère.

III.1.a. Montrer que, quel que soit le couple (i, j) appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, le couple $\varphi(i, j)$ appartient à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$.

III.2.b. Soit Φ_f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à une matrice $M = (m_{ij})$, associe la matrice $\Phi_f(M) = (m'_{ij})$ vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m'_{ij} = m_{kl}$, le couple (k, l) étant égal à $\varphi(i, j)$. Montrer que l'application Φ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.3. Soit \mathcal{F} l'ensemble $\{\Phi_f ; f \in \mathcal{I}\}$. Montrer que (\mathcal{F}, \circ) est un groupe isomorphe au groupe (\mathcal{I}, \circ) . (Le symbole \circ désigne la composition des applications.)

III.4.

III.4.a. Vérifier que l'image d'une matrice magique d'ordre n quelconque par un élément de \mathcal{F} quelconque est une matrice magique d'ordre n .

III.A.b. Soient f et g des éléments de \mathcal{I} . Montrer que, s'il existe une matrice magique M d'ordre n telle que $\Phi_f(M) = \Phi_g(M)$, alors $f = g$.

III.4.c. Montrer que l'ensemble des matrices magiques d'ordre n est fini et que son cardinal est un multiple de 8.

PARTIE IV : ÉTUDE D'UN GROUPE ASSOCIÉ À CERTAINES PERMUTATIONS DE $\llbracket 1, n \rrbracket$

Étant donnée une permutation quelconque σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_σ la matrice (a_{ij}) appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} = \delta_{\sigma(i), j}$, ce dernier symbole (dit « de Kronecker ») étant défini par la relation :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note \mathcal{S} l'ensemble $\{A_\sigma / \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

IV. 1. Soient σ un élément de \mathfrak{S}_n et $M = (m_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter le terme général de la matrice $A_\sigma M$, puis le terme général de la matrice MA_σ .

IV.2. Montrer que (\mathcal{S}, \times) est un groupe isomorphe au groupe (\mathfrak{S}_n, \circ) . (Le symbole \times désigne la multiplication matricielle.)

IV.3.

IV.3.a. Soit K un réel. Montrer que, pour toute matrice M appartenant à $L_K \cap C_K$ et toutes permutations σ et σ' de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $A_\sigma M A_{\sigma'}$ appartient à $L_K \cap C_K$.

IV.3.b. On note \mathfrak{I}_n l'ensemble des permutations σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sigma(n+1-k) = n+1-\sigma(k).$$

Soit σ un élément de \mathfrak{I}_n . Montrer que, si M est une matrice magique de taille n , alors $A_\sigma M A_{\sigma^{-1}}$ en est aussi une.

IV.4. On note \mathcal{J} l'ensemble $\{A_\sigma / \sigma \in \mathfrak{I}_n\}$.

IV.4.a. Montrer que (\mathcal{J}, \times) est un sous-groupe de (\mathcal{S}, \times) .

IV.4.b. Déterminer le nombre d'éléments de \mathcal{J} .

PARTIE V : CONSTRUCTION DE MATRICES MAGIQUES
D'ORDRE n IMPAIR

V.A. Cas où n n'est pas multiple de 3.

On suppose dans cette section V.A. que n est un entier impair non multiple de 3. On dit que deux entiers p et q sont congrus module n , et l'on note $p \equiv q \pmod{n}$, lorsque n divise $p - q$.

V.A.1. Montrer qu'il existe un entier m premier avec n tel que, pour tout quadruplet (i, j, k, l) appartenant à \mathbb{Z}^4 ,

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j \pmod{n} \\ l \equiv i + 2j \pmod{n} \end{cases} \text{ si et seulement si } \begin{cases} i \equiv m(2k - l) \pmod{n} \\ j \equiv m(2l - k) \pmod{n}. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout couple (k, l) appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, il existe un et un seul couple (i, j) appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que :

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j \pmod{n} \\ l \equiv i + 2j \pmod{n}. \end{cases}$$

On note alors $i = \alpha(k, l)$ et $j = \beta(k, l)$.

V.A.2. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau quotient de \mathbb{Z} par l'idéal $n\mathbb{Z}$ et, si x est élément de \mathbb{Z} , \dot{x} la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

V.A.2.a. Soient u et v deux entiers relatifs, u non nul. Montrer que, si u et n sont premiers entre eux, l'application $x \mapsto \dot{u}x + \dot{v}$ est une bijection de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur lui-même.

V.A.2.b. En déduire que, pour tout l appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$, la somme $\sum_{k=1}^n \alpha(k, l)$ est constante (préciser sa valeur en fonction de n).

Soit $W = (w_{i,j})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$w_{i,j} = n(i - 1) + j.$$

Soit $G = (g_{k,l})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (k, l) appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$g_{k,l} = w_{\alpha(k,l), \beta(k,l)}.$$

V.A.3. Construire G dans le cas où $n = 5$.

Dans la suite, l'entier n n'est plus supposé égal à 5.

V.A.4.

V.A.4.a. Montrer que l'ensemble des coefficients de G est $\llbracket 1, n^2 \rrbracket$.

V.A.4.b. Montrer que G est une matrice magique d'ordre n .

V.A.5. Dans cette question, on établit une propriété supplémentaire de la matrice G . Si i appartient à $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note

$$E_i = \{(k, l) ; (k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / k - l \equiv i \pmod{n}\}.$$

V.A.5.a. Montrer que, pour tout i appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{(k,l) \in E_i} g_{kl} = K_n$.

V.A.5.b. Déterminer n autres ensembles F_1, F_2, \dots, F_n analogues aux ensembles E_1, E_2, \dots, E_n tels que, pour tout i appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{(k,l) \in F_i} g_{kl} = K_n$.

V.B. Composition de deux matrices magiques. Cas où n est multiple de 3.

Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 3.

A partir d'une matrice magique $A = (a_{kl})$ d'ordre p et d'une matrice magique $B = (b_{ij})$ d'ordre q , on considère la matrice carrée $D = (d_{uv})$ d'ordre pq vérifiant, pour tout (k, l) appartenant à $\llbracket 1, p \rrbracket^2$ et tout (i, j) appartenant à $\llbracket 1, q \rrbracket^2$, $d_{(i-1)p+k, (j-1)p+l} = a_{kl} + (b_{ij} - 1)p^2$.

V.B.1. Construire D dans le cas particulier où les matrices A et B sont égales à $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

V.B.2. Montrer que, pour toutes matrices magiques A et B d'ordres respectifs p et q , D est une matrice magique d'ordre pq .

V.B.3. En déduire que, si n est un multiple de 3, l'ensemble des matrices magiques d'ordre n n'est pas vide.