Notations:

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes, on dit que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ converge si et seulement si les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ convergent.

Le n-ième coefficient de Fourier d'une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, à valeurs dans $\mathbb{C}$, est noté $c_n(f)$, il est défini pour n dans $\mathbb{Z}$ par:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \ .$$

La première partie est consacrée à des résultats préliminaires: des convergences d'intégrales en I.A. et des sommes de séries en I.B.

Dans la partie II.A. on transforme des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, ayant une propriété de décroissance à l'infini, en des fonctions 2π-périodiques, ce qui permet d'établir une formule sommatoire. Cette transformation est ensuite appliquée, en II.B., à la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$.

Le but de la partie III est l'étude du comportement asymptotique d'une suite définie par une intégrale. Cette étude est ensuite utilisée pour examiner la convergence d'une suite définie implicitement.

Les séries de Fourier sont employées dans les parties I.B. et II.

Les résultats et les théorèmes utilisés au cours des démonstrations doivent être clairement énoncés par le candidat.

Les parties II et III sont indépendantes

I

Dans cette partie, f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

A.1. Vérifier pour tout réel $\alpha>1$ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\, dt$.

A.2.i. Montrer que f est la dérivée d'une fonction 2π-périodique si et seulement si $c_0(f)$ est nul.

A.2.ii. En déduire, pour tout réel $\beta>0$, la convergence de l'intégrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)-c_0(f)}{t^\beta}\, dt \quad .$$

A.3.i. Soit β un réel de l'intervalle $]0,1]$. Si $c_0(f)$ est non nul, donner un équivalent en $+\infty$ de la fonction: $x \longrightarrow \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^\beta}\, dt$.

A.3.ii. A quelle condition l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t}\, dt$ est-elle convergente ?

A.3.iii. Donner un équivalent en $+\infty$ de la fonction: $x \longrightarrow \displaystyle\int_1^x \frac{|\sin t|}{t}\, dt$.

B.1. Justifier la convergence de la série: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$.

Lorsque f est de plus de classe C^1 par morceaux, comparer $c_k(f)$ et $c_k(f')$; en déduire la convergence des séries: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2|c_k(f)|^2$ et $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|$.

Montrer alors l'existence d'un réel $S>0$, indépendant de f, tel que:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| \leq |c_0(f)| + S \left[\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt \right]^{1/2}$$

B.2. En utilisant la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $[-\pi,+\pi]$ par $\theta(t) = t^2$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ et calculer la somme des séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad .$$

B.3. On suppose que f est de classe C^1 par morceaux, montrer alors que pour tout réel x on a:

$$\left| f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt \right|^2 \leq \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt \quad .$$

Montrer qu'il existe une fonction réelle φ non constante, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux et 2π-périodique, vérifiant:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \varphi(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt \right|^2 = \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|^2\, dt \quad .$$

II

A. Dans cette partie, g désigne une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant la condition (R) suivante:

(R): *il existe* $\alpha>1$ *et* $M\geq 0$ *tels que pour tout réel x :*

$$|x|^{\alpha}|g(x)| \leq M \text{ et } |x|^{\alpha}|g'(x)| \leq M \; .$$

A.1. Montrer que la suite de fonctions $(G_N)_{N\geq 0}$ définies par:

$$G_N(x) = 2\pi \sum_{n=-N}^{+N} g(x+2n\pi) \; ,$$

converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

A.2. On désigne par G la limite de la suite $(G_N)_{N\geq 0}$. Démontrer que G est une fonction 2π-périodique de classe C^1.

A.3. Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{Z}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-ikt}\, dt$ converge et a pour valeur $c_k(G)$. En déduire l'égalité:

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(2n\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-ikt}\, dt \right] .$$

A.4. Plus généralement, montrer que si h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant la condition (R), alors pour tout réel $\lambda>0$ on a:

$$\lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-2i\pi kt/\lambda}\, dt \right] .$$

B.1. Pour $r>0$, on pose :

$$D(r)=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 \leq r^2\right\} \text{ et } \Delta(r)=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \;/\; |x| \leq r \text{ et } |y| \leq r\right\} .$$

Calculer $\displaystyle\iint_{D(r)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx.dy$.

En déduire par un encadrement convenable de $\displaystyle\iint_{\Delta(r)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx.dy$ les inégalités:

$$\pi(1-e^{-r^2}) \leq \left[\int_{-r}^{+r} e^{-x^2}\, dx \right]^2 \leq \pi(1-e^{-2r^2}) .$$

B.2. Pour tout réel y on pose: $F(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx$.

B.2.i. Donner la valeur de F(0). Montrer que F définit une fonction constante sur $\mathbb{R}$ (On pourra introduire la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_n(y)=\int_{-n}^{+n} e^{-(x+iy)^2}\, dx$ et calculer la dérivée de F).

B.2.ii. En déduire la valeur des intégrales: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2ixy}\, dx$.

B.3. En utilisant le résultat de II A.4, démontrer pour tout a>0 l'égalité:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a^2 k^2} = \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2/a^2} .$$

B.4. Pour x>0 on pose $\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2 x}$.

Montrer que ψ est une fonction indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Etablir que pour tout x>0 on a:

$$0\leq \psi(x)-1 \leq 2\,(e^{\pi x}-1)^{-1} \quad \text{et} \quad \psi(x)=x^{-1/2}\psi(x^{-1}).$$

En déduire que:

$$\lim_{0+}(\psi(x) - x^{-1/2}) = 0.$$

III

A.1. Vérifier que pour tout entier N≥1 et pour tout réel u de [0,1] on a:

$$\left| \ln(1+u)- \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} \right| \leq \frac{u^{N+1}}{N+1} .$$

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, du$.

A.2. Etablir pour tout entier n≥1 la majoration:

$$\left| n \int_0^1 \ln(1+t^n)\, dt - \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, du \right| \leq \frac{1}{n+1} .$$

En déduire pour tout α de [0,1[la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par:

$$u_n = n \int_\alpha^1 \ln(1+t^n)\, dt .$$

A.3. Soient α un réel de [0,1[et $f:[\alpha,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Démontrer que la suite $v_n = n \int_\alpha^1 f(t) \ln(1+t^n)\, dt$ converge vers $\frac{\pi^2}{12} f(1)$

(On étudiera d'abord le cas où f(1)=0) .

B. *On utilise la notation* $U_n = o(1/n^2)$ *pour traduire que la suite* $(U_n)_{n\geq 0}$ *vérifie:* $\lim n^2 U_n = 0$.

Soit f une application à valeurs réelles, de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$ où $0 \leq a < b$.

On pose: $$I_n = \int_a^b \frac{t^n f(t)}{1+t^n}\, dt \quad .$$

B.1. Dans le cas $b<1$, montrer que pour tout entier $p \geq 0$ on a $\lim_{n \to +\infty} n^p I_n = 0$.

B.2. On suppose $b=1$. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que:

$$I_n = \frac{f(1)\ln 2}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\frac{\pi^2}{12} + o(1/n^2) \quad .$$

B.3. Lorsque $a \geq 1$, déduire des cas précédents l'existence de deux constantes λ et μ, que l'on exprimera, dans le cas $a=1$, en fonction de $f(1)$ et $f'(1)$, telles que:

$$I_n = \int_a^b f(t)\, dt + \frac{\lambda}{n} + \frac{\mu}{n^2} + o(1/n^2) \quad .$$

En déduire que si $a<1<b$ alors on a:

$$I_n = \int_1^b f(t)\, dt - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\frac{\pi^2}{6} + o(1/n^2) \quad .$$

B.4. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif γ, trois constantes λ_1, λ_2 et λ_3 telles que:

$$\int_0^{\gamma} \frac{e^t}{1+t^n}\, dt = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n} + \frac{\lambda_3}{n^2} + o(1/n^2) \quad .$$

B.5. Soit α un réel positif. Montrer que pour tout entier n il existe un et un seul réel, noté x_n , tel que : $\displaystyle\int_0^{x_n} \frac{e^t}{1+t^n}\, dt = \alpha$.

En examinant successivement les cas : $0 \leq \alpha < e-1$, $e-1 < \alpha$ puis $\alpha = e-1$, étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.