SÉRIES ENTIÈRES - SÉRIES DE FOURIER

1. On considère les séries entières $\sum \ln n\, x^n$ et $\sum (1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})x^n$.

a. Déterminer leurs rayons de convergence, et exprimer la somme de la seconde grâce aux fonctions usuelles.
b. En majorant leur différence, donner un équivalent de la première série entière au voisinage de 1.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de parenthésages envisageables pour calculer un produit de $n+1$ termes avec une loi non associative. On posera conventionnellement $u_0 = 1$.

a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Établir la formule de récurrence $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

c. On fait momentanément l'hypothèse que la série entière $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence non nul. Prouver que sa somme est solution d'une certaine équation du second degré.

d. On envisage (pourquoi ?) la fonction g définie sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ par $g(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = ???$

Prouver que g est développable en série entière sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$, et expliciter ce développement (que l'on notera formellement $\sum a_n x^n$).

e. Prouver que la suite (a_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n), puis en déduire que l'on a : $u_n = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3. **a.** Développer en série entière $\sqrt{1+x}$ pour x réel élément de]–1,1[. On note $\sum a_n x^n$ ce développement.

b. Calculer, pour z complexe de module strictement plus petit que 1, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^2$.

c. Prouver que la partie réelle de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ n'est jamais nulle. À laquelle des deux racines carrées de $1+z$ cette somme de série est-elle égale ?

4. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme $f(x)$ pour $x \in]-R,R[$. Soit $a \in]-R,R[$. Prouver que l'application définie par $g(h) = f(a+h)$ est développable en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

5. On pose, pour tout réel x, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\sin(n^2 x)$.

a. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et déterminer ses dérivées successives.
b. Prouver que la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence nul (on pourra utiliser une série double).

6. Théorème d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, telle que la série $\sum a_n$ converge. Prouver que la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (on écrira $a_n = R_{n-1} - R_n$ avec $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$). Qu'en déduire ?

7. On établit dans cet exercice une condition nécessaire et suffisante (portant sur l'ordre de grandeur de ses dérivées successives) pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ soit développable en série entière.

a. Soit *f* une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-\alpha,\alpha[$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose l'existence de deux constantes *A* et *k* telles que :

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq Ak^n n!\,.$$

Prouver, grâce à une formule de Taylor, que *f* est développable en série entière autour de 0, et expliciter un intervalle sur lequel *f* est somme de sa série de Taylor.

b. Réciproquement, on se donne une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence *R* non nul, et on désigne par $f(x)$ sa somme pour *x* élément de $]-R,R[$. Soit *r* un élément de $[0,R[$, et α un réel vérifiant $0 \leq \alpha < r$.

i. Prouver que la suite $(a_n r^n)$ est bornée ; on notera $M = \sup_n \left|a_n r^n\right|$.

ii. Quelle formule obtient-on en dérivant à un ordre *p* quelconque le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x}$?

iii. Prouver que pour tout *x* de $[-\alpha,\alpha]$ et pour tout entier positif *p*, on a :

$$\left|f^{(p)}(x)\right| \leq Mr\frac{1}{(r-\alpha)^{p+1}}\,p!\,.$$

8. Soit $\sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, *f* sa fonction somme définie sur le disque $D(0,R)$ du plan complexe. Soit *a* un élément de $D(0,R)$, et *r* un réel tel que $|a| < r < R$.

a. Pour θ dans $[0,2\pi]$, représenter $f(re^{i\theta})$ et $\dfrac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}}$ sous forme de séries et en déduire un développement en série de $g(\theta) = \dfrac{f(re^{i\theta})}{1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}}$.

b. Prouver que la convergence de la série obtenue est normale sur $[0,2\pi]$, et en déduire la formule intégrale de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}}\,d\theta\,.$$

c. Soit réciproquement une fonction continue *f* sur $D(0,R)$, qui pour tous *a* et *r* vérifiant $|a| < r < R$, satisfait à la formule intégrale précédente.

Grâce au développement en série de $\dfrac{1}{1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}}$, puis à une intégration terme à terme bien justifiée, prouver que *f* est développable en série entière sur $D(0,R)$.

d. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $D(0,R)$, développables en série entière sur ce disque, et convergeant uniformément sur tout disque $D(0,r)$ avec $r < R$, vers une fonction *f*. Prouver que *f* est définie et continue sur $D(0,R)$, et qu'elle vérifie, pour tous *a* et *r* vérifiant $|a| < r < R$, la formule intégrale de Cauchy. Conclure.

e. Le résultat obtenu à la question **d.** subsiste-t-il si les fonctions f_n sont développables en série entière sur l'intervalle $]-R,R[$ de $\mathbb{R}$ et convergent uniformément vers une fonction *f* sur tout segment $[-r,r]$ inclus dans $]-R,R[$?

9. Soit la fonction f, 2π-périodique, définie par $f(x)=\sqrt{|x|}$ pour tout x de $[-\pi,\pi]$.

- **a.** Exprimer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ en fonction de l'intégrale $u_n=\int_0^\pi \frac{1-\cos(nt)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.
- **b.** Prouver que pour tout n, on a $0\le u_n\le 5\sqrt{n}$.
- **c.** En déduire que f est somme de sa série de Fourier. Intérêt ?

10. Plus classique, tu meurs…

On fixe un réel λ non entier.

- **a.** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique dont la restriction à $[-\pi,\pi]$ est $x\mapsto\cos\lambda x$.
- **b.** En déduire les deux jolies (et utiles) formules suivantes :

$$\pi\,\mathrm{cotg}\,\lambda\pi=\frac{1}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\lambda}{\lambda^2-n^2}\quad\text{et}\quad\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}=\frac{1}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2\lambda}{\lambda^2-n^2}.$$

- **c.** Calculer la somme de la série $\sum\frac{1}{n^2+1}$.

11. On se propose ici de prouver une forme affaiblie du théorème de Dirichlet, connue sous le nom de "Théorème de Féjer", selon laquelle, si f est une fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f au sens de Cesàro.

On fixe donc une fonction f continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On rappelle les quelques résultats suivants : si $S_n(f)$ désigne la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f, alors pour tout réel x, on a :

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout entier non nul n, on posera $\sigma_n(f)=\dfrac{S_0(f)+S_1(f)+\ldots+S_{n-1}(f)}{n}$.

- **a.** Prouver que f est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Calculer, pour u non nul dans $[-\pi,\pi]$, la somme $\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})u$.
- **c.** Prouver que pour tout réel x, on a :

$$\sigma_n(f)(x)-f(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(u+x)-f(x)\right)\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

On fixe un réel ε strictement positif.

- **d.** Prouver l'existence d'un réel δ élément de $]0,\pi[$ tel que, pour tous réels x et u, on ait :

$$|u|\le\delta\Rightarrow|f(u+x)-f(x)|\le\varepsilon.$$

- **e.** Prouver l'inégalité :

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(f(u+x)-f(x)\right)\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u\right|\le\varepsilon.$$

- **f.** Prouver que si M désigne la norme infinie de f, on a :

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}\big(f(u+x)-f(x)\big)\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}\mathrm{d}u+\int_{\delta}^{\pi}\big(f(u+x)-f(x)\big)\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}\mathrm{d}u\right)\right|\le\frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

g. En déduire que la suite $(\sigma_n(f))$ converge uniformément vers *f* sur $\mathbb{R}$.

h. Prouver que l'on peut écrire, pour tout entier *n* non nul et tout réel *x* :

$$\sigma_n(f)(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n})\big[a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\big].$$

i. Prouver le théorème de Stone-Weierstrass.

12. Théorème de Liouville

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence *R* non nul (éventuellement infini), et *f* sa fonction somme définie sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon *R* du plan complexe.

Soit *r* un réel élément de $[0,R[$. On se propose (dans les questions **b.** et **c.**) de donner deux démonstrations de l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}.$$

a. Prouver que la série $\sum|a_n|^2 r^{2n}$ est convergente (ce n'est pas indispensable pour traiter les deux questions suivantes).

b. Écrire, pour tout réel θ, $h(\theta)=f(re^{i\theta})$ sous forme d'une série. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction h (on vérifiera très soigneusement les hypothèses du théorème utilisé).

Conclure.

c. On veut donner ici une preuve directe de notre égalité :

Pour θ élément de $[0,2\pi]$, représenter, grâce à un produit de Cauchy, $\left|f(re^{i\theta})\right|^2$ comme somme d'une série.

Prouver que cette série peut être intégrée terme à terme par rapport à θ, et en déduire le résultat demandé.

d. On pose, toujours pour *r* élément de $[0,R[$, $M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$.

Prouver, pour tout entier *n*, l'inégalité de Cauchy : $|a_n|\le\dfrac{M(r)}{r^n}$.

e. On suppose dans cette question que *R* est égal à $+\infty$, et que *f* est une fonction bornée sur $\mathbb{C}$. Prouver que *f* est constante (c'est ce résultat qu'un historien des sciences, bourré ou incompétent, a nommé *le théorème de Liouville*, alors qu'il est dû à 100% à Cauchy…).

13. On pose, quand c'est possible, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2\ln n}$ et $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$.

a. Donner le domaine de définition de *f*, prouver que *f* est continue et déterminer sa série de Fourier.

b. Prouver que pour tout *x* de $\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$ et tous entiers *p* et *q* avec $q>p$, on a $\left|\sum_{k=p+1}^{q}\cos kx\right|\le\dfrac{1}{\sin x/2}$. En déduire que la série définissant $g(x)$ converge pour tout *x* de $\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$, et que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[\alpha,2\pi-\alpha]$ avec $\alpha>0$. Qu'en conclure concernant *f* ?

c. En écrivant $g(x)=\sum_{n=1}^{[\frac{1}{x}]}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}+\sum_{n=[\frac{1}{x}]}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$, déterminer la limite de g en 0.