Thème : Surfaces minimales

Rappels

Les préliminaires ne sont utilisés que dans la partie I. Les parties II et III peuvent être traitées indépendamment de la partie I si l'on prend note des notations de Monge (I.4)) et de la redéfinition d'une application minimale (en gras, avant la partie II).

Préliminaires

*On rappelle les résultats suivants, auxquels on fera référence par **T1, T2,** ou **T3** :*

T1 : Soient $a < b$ des réels, X une partie compacte d'un espace vectoriel normé et $f : [a,b] \times X \to \mathbb{R}$ une application continue. L'application $G : [c,d] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

est continue.

T2 : Soient $a < b$, $c < d$ des réels, et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose [1] que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continue (en tant que fonction de deux variables bien entendu). L'application $G : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

est de classe C^1 sur $[c,d]$ et

$$G'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$$

T3 : Soient $a < b$, $c < d$ des réels, et $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une application continue. On a (ces expressions ont un sens d'après **T1**) :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Cette valeur commune sera notée

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1. Noter que le domaine de définition de f n'est pas ouvert. Mais la notion de dérivée partielle en un point du bord est aisée à définir.

I. L'équation des surfaces minimales

Soient $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ et $f : \Delta \to \mathbb{R}$ une application de classe [2] C^2. On admet que l'aire du graphe de f « au-dessus de Δ » est donné par :

$$A(f) = \iint_\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

On suppose que f est minimale, c'est-à-dire que pour toute application $g : \Delta \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui coïncide avec f sur la frontière de Δ, on a :

$$A(f) \leqslant A(g)$$

On considère une application $h : \Delta \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et nulle sur la frontière de Δ.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$,
$$A(f) \leqslant A(f + \varepsilon h)$$

2. On définit
$$\begin{array}{rccl} V : & [a,b] \times [c,d] \times [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,\varepsilon) & \mapsto & \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}. \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rccl} H : & [a,b] \times [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,\varepsilon) & \mapsto & \displaystyle\int_c^d V(x,y,\varepsilon)\, \mathrm{d}y \end{array}$$
Montrer que $\varepsilon \mapsto A(f + \varepsilon h)$ est de classe C^1 sur $[-1,1]$, de dérivée
$$\varepsilon \mapsto \int_a^b \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}(x,\varepsilon)\, \mathrm{d}x = \iint_\Delta \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}(x,y,\varepsilon)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3. Montrer que (chaque dérivée partielle est prise en (x,y)) :
$$\iint_\Delta \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

4. On adopte les notations de Monge :
$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$
Déduire de ce qui précède :
$$\iint_\Delta h(x,y) \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

2. Même remarque.

5. On suppose qu'il existe $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{\Delta}$ tel que

$$((1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t)(x_0, y_0) > 0$$

   (a) On note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $\varphi(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que φ est de classe C^2.

   (b) Montrer qu'on peut choisir h telle que $h(x_0, y_0) > 0$ et, en tout point (x, y) :

$$h(x,y)\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \geqslant 0.$$

   (c) En déduire que f vérifie :

$$(E) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$$

   Cette équation est appelée équation des surfaces minimales. On montre réciproquement que si f satisfait cette équation, alors f est minimale.

6. Le fait que f soit minimale se traduit donc par une condition locale, alors que la définition était globale. Pouvait-on l'anticiper (on attend ici une argumentation heuristique, pas une démonstration) ?

On appellera désormais minimale une application continue f définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ dont la restriction à $\overset{\circ}{\Omega}$ est de classe C^2 et satisfait l'équation des surfaces minimales (E).

II. Caténoïde

On s'intéresse ici aux surfaces minimales invariantes par rotation autour de l'axe Oz.

Soient $a > 0$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geqslant a^2\}$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue, de classe C^2 sur $\overset{\circ}{\Omega}$. On définit, pour $r \in [a, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

1. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$.

On suppose dans la suite de cette partie que g est indépendante de θ. On écrira donc $g(r)$ et $g'(r)$ en lieu et place de $g(r, \theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$.

2. Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de r, g et ses dérivées.
3. En déduire que f est minimale si et seulement si g vérifie :

$$\forall r > a,\ rg''(r) + g'(r)(1 + g'(r)^2) = 0$$

4. On pose $v(r) = g'(r)^2$. Quelle équation différentielle satisfait v ?
5. On admet que les solutions sur $]a, +\infty[$ de cette équations sont de la forme $v(r) = \dfrac{b^2}{r^2 - b^2}$, où $b \in [0, a]$. Quelles sont les fonctions minimales sur Ω telles que g soit indépendante de θ ?

III. Surface de Scherk

On cherche les solutions de l'équation des surfaces minimales de la forme $f(x,y) = g(x) + h(y)$, où f et g sont deux applications de classe C^2 (définies chacune sur un intervalle).

1. Écrire l'équation des surfaces minimales pour une telle application.
2. Donner une solution non constante définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Question subsidiaire pour les artistes : Représenter une caténoïde et une surface de Scherk.