Ce devoir est constitué de trois problèmes totalement indépendants. Le premier a essentiellement pour objet de fournir un support de révision à la Réduction, les deux autres, plus courts, de passer en revue les raisonnements les plus typiques de l'Algèbre euclidienne.

PROBLEME 1

Notations

Pour p et q entiers avec $p \le q$, $[\![p,q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris au sens large entre p et q.

E désigne un espace vectoriel de dimension finie n, $n \ge 2$, sur le corps **K**, **K** désignant **R** ou **C**.

Dans tout le problème, f désigne un endomorphisme de E, $\left(f^k\right)$ la suite de ses itérés, Id désigne l'identité de E, et 0 l'endomorphisme nul. Par convention, $f^0 = Id$.

Si $R = a_0 + a_1 X + \ldots + a_p X^p$ est un polynôme à coefficients dans **K**, on note $R(f)$ l'endomorphisme $a_0 Id + a_1 f + \ldots + a_p f^p$. On note alors $\mathbf{K}[f]$ l'algèbre engendrée par f, c'est-à-dire que $\mathbf{K}[f]$ est l'ensemble des endomorphismes de la forme $R(f)$ où R parcourt $\mathbf{K}[X]$.

On note P_f le polynôme caractéristique de f : $P_f = \det(XId - f)$. On rappelle le théorème de Cayley-Hamilton : $P_f(f) = 0$.

On définit de même le polynôme caractéristique d'une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$ par $P_M = \det(XI_n - M)$, où I_n désigne la matrice unité.

$GL_n(\mathbf{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{K})$.

On dit que f est <u>cyclique</u> s'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.

On appelle <u>commutant</u> de f l'ensemble $\mathrm{Com}(f) = \left\{g \in L(E) \,/\, f \circ g = g \circ f\right\}$.

On <u>admettra</u> que $\mathrm{Com}(f)$ est une algèbre de dimension au moins n sur **K**.

L'objectif de ce problème est d'étudier diverses caractérisations des endomorphismes cycliques.

Partie I

<u>Matrice Compagnon d'un endomorphisme cyclique</u>

1. Montrer que f est cyclique si et seulement si il existe une base B de E dans laquelle f a une matrice de la forme :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n .$$

On dira alors que C est une <u>matrice compagnon</u> de f.

2. On conserve les notations de la question précédente.
Déterminer le polynôme caractéristique P_C de C (on dira aussi que C est la matrice compagnon du polynôme P_C).
Si f est un endomorphisme cyclique, f possède-t-il une unique matrice compagnon ?

3. Soit λ une valeur propre de C. Déterminer la dimension de l'espace propre associé à λ, et en déterminer une base. En supposant que C est une matrice complexe, donner une condition nécessaire et suffisante pour que C soit diagonalisable.

Partie II
Endomorphismes nilpotents

4. On suppose dans cette question que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
Montrer que *f* est cyclique, et déterminer sa matrice compagnon.
Quelle est la dimension du noyau de *f* ?

5. On suppose maintenant que *f* est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier *p* supérieur ou égal à 2 tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

On pose, pour $k \in [\![0, p]\!]$, $N_k = \mathrm{Ker}\, f^k$ et $n_k = \dim N_k$.

On suppose enfin que $n_1 = 1$.

a. Montrer que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $f(N_{k+1}) \subset N_k$.

b. En considérant l'application : $\begin{array}{l} r : N_{k+1} \to N_k \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}$, montrer que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $n_{k+1} \leq n_k + 1$.

c. Montrer par récurrence que si $N_k = N_{k+1}$, alors $N_j = N_k \ \forall j \geq k$.
En déduire que $p = n$ et déterminer n_k pour tout *k* de $[\![0, n]\!]$.

Partie III
Une première caractérisation des endomorphismes cycliques

6. Prouver que si *f* est cyclique, la famille $(Id, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $L(E)$. Ce résultat sera également utilisé dans la partie **IV**.

On suppose maintenant que la famille $(Id, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ *est libre, et l'on veut prouver que f est cyclique.*

7. On suppose dans toute cette question que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

On factorise alors le polynôme caractéristique de *f* sous la forme $P_f = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ où les λ_k sont les valeurs propres deux à deux distinctes de *f*.

On définit enfin le sous-espace caractéristique E_k associé à la valeur propre λ_k par $E_k = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_k Id)^{m_k}\right)$.

a. Montrer que les sous-espaces E_k sont stables par *f* et que l'on a $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$.

b. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme :

$$\varphi_k : \begin{cases} E_k \to E_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

Déterminer $\varphi_k^{m_k}$. Quelle est la dimension de E_k ?

Montrer que $\varphi_k^{m_k - 1}$ n'est pas l'endomorphisme nul.

c. En déduire, en utilisant les résultats de la partie **II**, l'existence d'une base *B* de *E* dans laquelle *f* possède une matrice "diagonale par blocs", ces blocs appartenant à $M_{m_k}(\mathbf{C})$ et étant de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & \lambda_k & & & \\ 0 & 1 & \lambda_k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

d. En utilisant la matrice compagnon de *f*, prouver que *f* est cyclique.

8. On suppose <u>dans toute cette question</u> que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

a. Soient A et B deux matrices réelles, que l'on suppose semblables dans $M_n(\mathbf{C})$: $A = QBQ^{-1}$ avec Q élément de $GL_n(\mathbf{C})$. On écrit $Q = Q_1 + \mathrm{i}Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont deux matrices réelles.

Prouver l'existence d'un réel α tel que la matrice $Q_1 + \alpha Q_2$ soit inversible.

En déduire que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbf{R})$.

b. Prouver que f est cyclique.
Conclure.

Partie IV

<u>Une caractérisation des endomorphismes cycliques par leur commutant</u>

9. On suppose que f est cyclique et on choisit x_0 dans E tel que $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.

a. Soit g un élément de $\mathrm{Com}(f)$. Prouver l'existence de scalaires α_0, α_1, …, α_{n-1} tels que :

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0).$$

Prouver alors que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$, et donc que g est un élément de $\mathbf{K}[f]$.

b. Montrer que g est un élément de $\mathrm{Com}(f)$ si et seulement si il existe un polynôme R de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $g = R(f)$.

10. On suppose que $\mathbf{K}[f] = \mathrm{Com}(f)$. Montrer que f est cyclique, et conclure.

Problème adapté de ENTPE 96.

PROBLÈME 2

- $M_{n,p}$ désigne l'epace des matrices <u>réelles</u> à n lignes et p colonnes ;
- à tout élément $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de $M_{n,1}$ on associe le vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$;
- si A est un élément de $M_{n,p}$, on désigne par Φ_A l'application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ de matrice A dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^n$;
- si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont dans $\mathbf{R}^n$, on pose $(x|y) = {}^tX.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\| = \|X\| = \sqrt{(x|x)}$;
- enfin, si A est un élément de $M_{n,p}$, on pose $\|A\| = \|\Phi_A\| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|\Phi_A(x)\|}{\|x\|} = \sup_{X \neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques questions liées à la résolution approchée d'équations de la forme $AX = B$, où A est un élément de $M_{n,p}$, B un élément de $M_{n,1}$, et X une inconnue de $M_{p,1}$.

Dans la partie **I**, A est supposée carrée et inversible. Il existe alors une solution unique. Il s'agit de savoir comment est modifiée cette solution quand B subit une variation ΔB. Dans la partie **II**, on étudie le cas d'équations ne possédant pas de solution ; on se contente alors de "pseudo-solutions".

Partie I

Dans cette partie, A est une matrice de $M_{n,n}$, supposée inversible.

1. Soit X l'unique solution de l'équation $AX = B$, où B est une matrice non nulle donnée de $M_{n,1}$. Quand B devient $B + \Delta B$, X devient $X + \Delta X$ tel que $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$.

Montrer que

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|} \quad \text{et que} \quad \mu(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq 1$$

2. On pose $A' = {}^tA.A$.

a. Prouver que les valeurs propres de A' sont réelles, strictement positives, et qu'il existe une matrice orthogonale P, une matrice diagonale D, telles que $D = P^{-1}A'P$.

b. Les valeurs propres de A' étant notées $\left(\lambda_i'\right)_{1 \leq i \leq n}$ et supposées rangées dans l'ordre croissant, montrer que pour tout Y de $M_{n,1}$, on a :

$$\|AY\| \leq \sqrt{\lambda_n'}\|Y\| \text{, et qu'il existe } Y_0 \text{ non nul vérifiant } \|AY_0\| = \sqrt{\lambda_n'}\|Y_0\|.$$

En déduire $\|A\|$.

c. Montrer que ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ ont le même polynôme caractéristique. En remplaçant A par A^{-1} dans la question précédente, en déduire la valeur de $\mu(A)$ en fonction des valeurs propres de A'.

3. **a.** On suppose A orthogonale. Calculer $\mu(A)$.

b. On suppose A symétrique. Exprimer $\mu(A)$ en fonction des valeurs propres de A.

c. Application numérique :

On donne $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$. Calculer $\mu(A)$, et déterminer ΔB (avec par exemple $\|\Delta B\| = 1$) de telle sorte que $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \mu(A)\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$ (ce qui prouve que l'inégalité obtenue à la question **1.** ne peut être améliorée dans le cas général).

Partie II

Dans cette partie, A est une matrice de $M_{n,p}$, B un élément de $M_{n,1}$, et on suppose qu'il n'existe aucune matrice X de $M_{p,1}$ telle que $AX = B$ (équation notée (E) dans la suite).

On appelle pseudo-solution de (E) toute matrice X_0 de $M_{p,1}$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|, X \in M_{p,1}\}$$

(ou encore $\|\Phi_A(x_0) - b\| = d(b, \mathrm{Im}\Phi_A)$ avec $d(b, \mathrm{Im}\Phi_A) = \inf\{\|\Phi_A(x) - b\|, x \in \mathbf{R}^p\}$).

1. **a.** En étudiant la projection orthogonale de b sur $\mathrm{Im}\Phi_A$, prouver l'existence de pseudo-solutions pour l'équation (E).

b. On suppose de plus Φ_A injective. Montrer que (E) admet alors une pseudo-solution unique.

c. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. x est pseudo-solution de (E) ;

ii. $\forall y \in \mathbf{R}^p, (\Phi_A(y) | \Phi_A(x) - b) = 0$;

iii. ${}^tAAX = {}^tAB$.

2. Application :

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé (O, i, j), on donne n points $M_k(x_k, y_k)$, $1 \le k \le n$. Soit D la droite d'équation $y = ax + b$. On définit, pour $1 \le k \le n$, les points $H_k(x_k, ax_k + b)$, et on se propose de déterminer D de façon à ce que $\sum_{k=1}^{n} \|M_k H_k\|^2$ soit minimum.

Montrer que ce problème revient à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $AX = B$ où A, B et X sont trois matrices que l'on explicitera.

À quelle condition sur les points M_k l'application Φ_A est-elle injective ? Déterminer alors la pseudo-solution du système.

3. Généralisation :

Soit C une partie de $\mathbf{R}^p$, non vide et différente de l'espace tout entier. On suppose que $\Phi_A(C)$ est une partie convexe et fermée de $\mathbf{R}^n$. On recherche les pseudo-solutions de l'équation $\Phi_A(x) = b$ pour x décrivant C.

a. Montrer l'existence d'une suite (x_k) d'éléments de C telle que :

$$\lim_{k\infty} \|\Phi_A(x_k) - b\| = d(b, \Phi_A(C)).$$

b. Prouver que la suite $(\Phi_A(x_k))$ est une suite de Cauchy.

c. En déduire l'existence de pseudo-solutions pour l'équation $\Phi_A(x) = b$ pour x décrivant C.