Une construction du corps R des réels

Ce document présente une construction du corps des réels se basant sur les idées du Français Charles Meray, améliorées en 1872 par Georg Cantor. Il est à noter qu'à peu près à la même époque, Richard Dedekind propose une autre présentation de **R**. Cependant, les démarches de Cantor et de Dedekind sont différentes : Cantor cherche à lutter contre "l'incomplétude" de **Q** en adjoignant à **Q** les limites virtuelles de ses suites de Cauchy ; Dedekind, quant à lui, ajoute à **Q** des bornes supérieures à ses parties non vides majorées. Ainsi, si l'on adopte la démarche de Cantor, **R** est *conçu pour être complet* mais si l'on suit Dedekind, il est conçu pour vérifier l'axiome de la borne supérieure.

A posteriori, on peut trouver une supériorité certaine à la démarche de Meray et de Cantor : en effet, leur procédé est généralisable et permet de plonger tout espace métrique dans un espace métrique complet. Le procédé de Dedekind, bien trop lié à l'ordre naturel de **Q**, interdit cette généralisation.

0. Mise en place ; quelques lemmes techniques indispensables.

> <u>Définition 1</u> : une suite $a=(a_n)$ de rationnels est dite *de Cauchy* si :
> $$\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^{*+},\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall p,q \geq N,\ \left|a_p - a_q\right| \leq \varepsilon .$$

> <u>Définition 2</u> : une suite $a=(a_n)$ de rationnels est dite *convergente* si :
> $$\exists l \in \mathbf{Q},\ \forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^{*+},\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall p \geq N,\ \left|a_p - l\right| \leq \varepsilon .$$

On vérifie sans difficulté particulière les quelques propriétés suivantes :

i. La somme de deux suites de Cauchy en est une, ainsi que le produit d'une suite de Cauchy par un rationnel.

ii. Une suite de Cauchy est bornée.

iii. Le produit de deux suites de Cauchy en est une (on écrit $\left|a_p b_p - a_q b_q\right| \leq \left|a_p\right|\left|b_p - b_q\right| + \left|b_q\right|\left|a_p - a_q\right|$ et on utilise qu'une suite de Cauchy est bornée).

iv. Le l de la définition d'une suite convergente est unique s'il existe. On l'appelle alors limite de la suite a.

v. Toute suite convergente est de Cauchy.

On peut résumer les propriétés *i.*, *ii.* et *iii.* précédentes en disant que l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites de Cauchy de rationnels constitue une sous **Q**-algèbre de l'algèbre des suites de rationnels.

1. L'ensemble R

L'idée pour construire **R** en tant qu'ensemble est la suivante : deux suites de Cauchy a et b de rationnels seront dites *équivalentes* si leur différence $a-b$ tend vers 0. Regroupons dans un même ensemble X toutes les suites de Cauchy équivalentes entre elles : les suites ainsi associées possèdent en commun leur "limite virtuelle", qu'il n'y a plus qu'à dénommer *nombre réel*. On reconnaît là le procédé classique de passage au quotient.

> <u>Définition 3</u> : deux suites de Cauchy de rationnels a et b sont dites *équivalentes* (et on notera $a \approx b$) si leur différence $a-b$ tend vers 0.

On vérifie sans aucune difficulté que la relation ainsi définie sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites de Cauchy de rationnels est une relation d'équivalence.

> <u>Définition 4</u> : l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\approx$ est noté **R** et ses éléments sont appelés *nombres réels* .

Remarquons d'ores et déjà que l'ensemble **Q** des rationnels peut être considéré comme une partie de **R**. En effet, l'application de **Q** dans **R** qui à un rationnel r associe la classe d'équivalence de la suite de Cauchy constante égale à r est injective (la différence de deux suites constantes distinctes ne tend pas vers 0, elles ne sont donc pas équivalentes !). Grâce à cela, on peut injecter **Q** dans **R**, en identifiant un rationnel *r* avec la classe de la suite constante égale à *r*.

Désormais, si *a* est une suite de Cauchy de rationnels, on désignera par $\overline{a}$ le réel qu'elle définit, c'est à dire la classe d'équivalence de *a* pour la relation $\approx$.

2. le corps R

On cherche dans un deuxième temps à transmettre à **R** les lois usuelles d'addition et de multiplication de **Q**. Pour ce faire, les précautions habituelles de transmission au quotient sont de mise, car l'on doit vérifier la *compatibilité* de ces lois avec la relation $\approx$.

En effet, si l'on veut par exemple définir la somme de deux réels $\overline{a}$ et $\overline{b}$ par : $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$, on doit s'assurer au préalable que cette définition est légitime en vérifiant que le résultat ne dépend pas des représentants des classes choisis. En bref, on doit vérifier que si $a \approx \alpha$ et si $b \approx \beta$, alors $a+b \approx \alpha+\beta$, ce qui est parfaitement évident puisque la somme de deux suites tendant vers 0 tend encore vers 0.

De la même façon, en supposant $a \approx \alpha$ et $b \approx \beta$, puis en écrivant $ab-\alpha\beta = a(b-\beta)+(a-\alpha)\beta$ et en utilisant le fait que le produit d'une suite de Cauchy (donc bornée) par une suite tendant vers 0 tend encore vers 0, on obtient que $ab \approx \alpha\beta$.

La définition suivante est donc légitime :

<u>Définition 5</u> : on définit deux lois de composition internes sur **R** en posant, pour $\overline{a}$ et $\overline{b}$ dans **R** :

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b} \quad \text{et} \quad \overline{a}\,\overline{b}=\overline{ab}.$$

Comme toujours, on vérifie sans difficulté que ces lois définies sur l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\approx$ conservent les propriétés de calcul algébrique des lois dont elles sont issues sur $\mathcal{C}$ comme la commutativité, l'associativité et autres. Comme la classe de la suite nulle est trivialement neutre pour l'addition, tandis que la classe de la suite constante égale à 1 est neutre pour la multiplication, il en résulte que :

<u>Proposition</u> : (**R**,+,.) est un anneau commutatif.

Reste à inverser les éléments non nuls de **R** pour obtenir un corps.

Soit donc $\overline{a}$ un élément non nul de **R**. Cela signifie que la suite *a* est une suite de Cauchy de rationnels ne tendant pas vers 0. Nous allons prouver successivement les points suivants :

i. la suite *a* devient non nulle à partir d'un certain rang *N*.

ii. si l'on définit une suite *b* en posant $b_0=\ldots=b_{N-1}=0$ et $b_n = 1/a_n$ pour $n \geq N$, la suite *b* est de Cauchy.

Supposons cela fait : alors la suite *ab* devenant constante égale à 1, elle est équivalente à la suite constante égale à 1 dont la classe est le neutre de **R**. On a donc $\overline{a}\,\overline{b}=\overline{ab}=1_{\mathbf{R}}$, et on a ainsi prouvé que tout élément non nul de **R** est inversible, **R** est un corps.

Écrivons que la suite *a* ne tend pas vers 0 :

$$\exists \varepsilon_0 \in \mathbf{Q}^{*+},\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists p \geq N,\ |a_p| \geq \varepsilon_0.$$

Mais *a* est de Cauchy, donc :

$$\exists N_1 \in \mathbf{N},\ \forall p,q \geq N_1,\ |a_p-a_q| \leq \varepsilon_0/2.$$

Choisissons alors un entier *p* supérieur à N_1 tel que $|a_p| \geq \varepsilon_0$. On a donc pour tout $n \geq N_1$:

$$|a_n| = |a_p+a_n-a_p| \geq |a_p|-|a_n-a_p| \geq \varepsilon_0-\varepsilon_0/2=\varepsilon_0/2>0.$$

Le point *i.* est ainsi prouvé, la suite *a* devient non nulle à partir du rang N_1.

Par ailleurs, on a pour *n* et *m* entiers plus grands que N_1 :

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_m}\right| = \frac{|a_n-a_m|}{|a_n a_m|} \leq \frac{4}{\varepsilon_0^2}|a_n-a_m|,$$

ce qui assure que la suite *b* définie par $b_n = 1/a_n$ pour $n \geq N_1$ est à son tour de Cauchy, c'est à dire le point *ii.*

Revenons enfin à l'injection de **Q** dans **R** évoquée plus haut, qui envoie un rationnel r sur la classe $\overline{r*}$ de la suite $r*$ constante égale à r. On a trivialement $\overline{(r+r')*} = \overline{r*} + \overline{r'*}$ de même que $\overline{(rr')*} = \overline{r*}\,\overline{r'*}$, ce qui s'interprète comme le fait que cette injection est un *morphisme d'anneaux*. Cela permet donc de voir désormais **Q** comme un sous-corps de **R**.

Théorème : (**R**,+,.) est un corps commutatif contenant le corps **Q**.

3. Le corps ordonné R

Il s'agit dans ce paragraphe de transmettre à **R** la relation d'ordre de **Q**, de manière à en faire un *corps totalement ordonné*.

Rappelons qu'un corps totalement ordonné est un corps muni d'une relation d'ordre totale $\prec$ compatible avec les lois, en ce sens que $a \prec b$ et $c \prec d \Rightarrow a+c \prec b+d$ et $a \prec b$ et $0 \prec c \Rightarrow ac \prec bc$.

Définition 6 : soit a une suite de Cauchy de rationnels. On dira que a est *non-négative* et on notera $a \succ 0$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{Q}^{*+},\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geq N,\ a_n \geq -\varepsilon .$$

On dit de même que a est *non-positive* si $-a$ est non-négative, et on note cela $a \prec 0$.

Vérifions que cette définition est compatible avec la relation d'équivalence $\approx$ sur $\mathcal{C}$, en ce sens que si $a \approx \alpha$ et si $a \succ 0$, alors $\alpha \succ 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{Q}^{*+}$. On a $a \succ 0$ et la suite $a - \alpha$ tend vers 0, il vient donc :

$$\exists N,\ \forall n \geq N,\ a_n \geq -\varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \exists N_1,\ \forall n \geq N_1,\ |a_n - \alpha_n| \leq \varepsilon/2 .$$

Alors, pour n supérieur à N et à N_1, il vient :

$$\alpha_n = a_n + \alpha_n - a_n \geq -\varepsilon/2 - \varepsilon/2 = -\varepsilon ,$$

ce qui est bien dire que $\alpha \succ 0$.

NB : cette terminologie inhabituelle est justifiée par le fait que – par définition – une suite positive est une suite dont tous les termes sont positifs. Or ce choix s'avérerait ici maladroit car le réel 0, que l'on veut positif, peut être représenté par des suites de Cauchy négatives. Il serait donc possible que deux suites de Cauchy soient équivalentes, mais que l'une soit positive et l'autre pas.

Définition 7 : soit a une suite de Cauchy de rationnels et $\overline{a}$ le réel qu'elle définit. On dira que $\overline{a}$ est positif si $a \succ 0$ (cette définition est bien légitime car comme on vient de le voir, si α est une autre suite de Cauchy de rationnels définissant le même réel $\overline{a}$, donc équivalente à a, on a encore $\alpha \succ 0$).

Définition 8 : Étant donnés deux réels x et y, on dira que x est inférieur ou égal à y (et on notera $x \leq y$) si le réel $y - x$ est positif au sens de la définition 7.

Théorème : La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur **R**, qui lui confère une structure de corps ordonné.

Réflexivité : il est facile de voir que la suite nulle est non-négative !

Antisymétrie : supposons $x \leq y$ et $y \leq x$, et soit a une suite de Cauchy de rationnels représentant le réel x, et b une suite de Cauchy de rationnels représentant le réel y. On a donc $b - a \succ 0$ et $a - b \succ 0$. Par définition, cela entraine pour $\varepsilon \in \mathbf{Q}^{*+}$ fixé que $\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geq N,\ b_n - a_n \geq -\varepsilon$ et que $\exists N' \in \mathbf{N},\ \forall n \geq N',\ a_n - b_n \geq -\varepsilon$. Il en résulte que pour n supérieur ou égal à N et à N', on a $-\varepsilon \leq b_n - a_n \leq \varepsilon$, c'est à dire que la suite $b - a$ tend vers 0. Les suites a et b sont donc équivalentes, et les réels qu'elles définissent sont égaux : on a donc $x = y$.

Transitivité : soient $x = \overline{a}$, $y = \overline{b}$ et $z = \overline{c}$ trois réels vérifiant $x \leq y$ et $y \leq z$. Les suites $b - a$ et $c - b$ sont donc non-négatives. Or il est facile de voir, à partir de la définition, que la somme de deux suites non-négatives est une suite non-négative. Il vient donc que $c - a$ est non-négative, c'est à dire que $x \leq z$.

L'ordre est total : nous allons prouver que toute suite de Cauchy de rationnels est soit non-négative, soit non-positive. Il en résultera qu'étant donné deux réels $x = \overline{a}$ et $y = \overline{b}$, on a soit $b - a \succ 0$, soit $b - a \prec 0$, c'est à dire que l'on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Soit donc (α_n) une suite de Cauchy de rationnels. Si la suite (α_n) tend vers 0, elle est tout aussi bien non-négative que non-positive. Supposons donc que la suite (α_n) ne tende pas vers 0 :

$$\exists \varepsilon_0 \in \mathbf{Q}^{*+},\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists p \geq N,\ \left|\alpha_p\right| \geq \varepsilon_0 .$$

Par ailleurs, la suite (α_n) est de Cauchy :

$$\exists N_1 \in \mathbf{N},\ \forall p, q \geq N_1,\ \left|\alpha_p - \alpha_q\right| \leq \varepsilon_0/2 .$$

Choisissons alors un entier p supérieur à N_1 tel que $\left|\alpha_p\right| \geq \varepsilon_0$. Pour fixer les idées, on supposera que $\alpha_p > 0$.

On a alors pour tout $n \geq N_1$:

$$\alpha_n = \alpha_p + \alpha_n - \alpha_p \geq \varepsilon_0 - \varepsilon_0/2 > 0 .$$

Les termes de la suite (α_n) deviennent tous strictement positifs à partie d'un certain rang, la suite α est donc non-négative. Si l'on avait supposé que $\alpha_p < 0$, on aurait trouvé de la même façon que tous les termes de la suite α sont strictement négatifs à partir d'un certain rang, et α aurait été non-positive.

Toute suite de Cauchy de rationnels est donc soit non-négative, soit non-positive, ce qui assure que la relation d'ordre $\leq$ que l'on a définie sur **R** est totale.

Compatibilité avec l'addition : soient $x = \overline{a}$, $y = \overline{b}$, $z = \overline{c}$ et $t = \overline{d}$ quatre réels vérifiant $x \leq y$ et $z \leq t$. Les suites $b - a$ et $d - c$ sont donc non-négatives, et comme la somme de deux suites non négatives est non négative, il vient que $b - a + d - c \succ 0$, soit encore que $(b + d) - (a + c) \succ 0$, ce qui est la définition du fait que $x + y \leq z + t$.

Compatibilité avec le produit : soient $x = \overline{a}$, $y = \overline{b}$ et $z = \overline{c}$ trois réels vérifiant $x \leq y$ et $0 \leq z$. Si $x = y$ ou si $z = 0$, on a $xz = yz$ et donc $xz \leq yz$. Supposons donc $x \neq y$ et $z \neq 0$. Les suites $b - a$ et c sont donc non-négatives et ne tendent pas vers 0. Comme on l'a vu plus haut, on peut alors affirmer que les termes de ces deux suites sont donc de signe constant à partir d'un certain rang, et comme elles sont non-négatives et ne tendent pas vers 0, ce signe ne peut-être que positif. On a donc $(b_n - a_n)c_n > 0$ pour n assez grand, la suite $(b - a)c = bc - ac$ est non-négative, et par suite on a $xz \leq yz$.

> <u>Théorème</u> : **R** est un corps *archimédien*, c'est à dire que l'on a la propriété suivante :
>
> $$\forall x, y > 0,\ \exists k \in \mathbf{N}^* \ /\ x \leq ky .$$

Soit en effet une suite de rationnels a représentant le réel x/y. La suite a étant bornée et **Q** étant archimédien, il existe un entier k tel que $a_n \leq k$ pour tout n. Alors la suite $k - a$ a tous ses termes positifs, elle est donc non-négative et par conséquent le réel qu'elle représente, $k - \frac{x}{y}$, est positif. On conclut en multipliant par $y \geq 0$.

> <u>Corollaire</u> : **Q** est *dense* dans **R**, en ce sens que :
>
> $$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbf{Q},\ x < r < y .$$

Le réel $y - x$ est positif sans être nul. Comme on l'a déjà vu, si a est une suite de Cauchy de rationnels définissant ce réel, il existe un rationnel $\varepsilon_0 > 0$ tel que $a_n \geq \varepsilon_0$ pour n assez grand. La suite $a - \varepsilon_0$ est donc non-négative, et le réel qu'elle définit est positif. Bref, $y - x \geq \varepsilon_0 > \varepsilon_0/2 = \alpha$.

Considérons alors le plus petit entier strictement positif n tel que $y \leq n\alpha$, ce qui est possible puisque **R** est archimédien. On a donc $(n-1)\alpha < y$ et $x < y - \alpha \leq n\alpha - \alpha$: le rationnel $(n-1)\alpha$ est strictement compris entre x et y.

4. Topologie de R

> <u>Définition 9</u> : une suite (x_n) de réels est dite *convergente* s'il existe un réel l tel que :
>
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geq N,\ l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon .$$

Comme on a vu que tout réel strictement positif peut être minoré par un rationnel strictement positif, cette définition est parfaitement équivalente à celle où l'on remplacerait $\forall\varepsilon > 0$ par $\forall\varepsilon \in \mathbf{Q}*^{+}$.

On peut encore prouver que le l de cette définition, s'il existe, est unique, et on le nommera *limite* de la suite (x_n) : en effet, en supposant que l' vérifie cette propriété, on aura $-2\varepsilon \le l - l' \le 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui entraîne $l - l' = 0$ (un réel positif plus petit que tout réel strictement positif est nul, sans quoi il serait inférieur à sa moitié !).

S'en suit alors le théorème sur lequel tout repose :

Théorème : soit x un réel et a une suite de Cauchy de rationnels qui le représente. Alors la suite a est convergente, de limite x.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{Q}*^{+}$. Il existe un rang N tel que $\forall p,q \ge N, -\varepsilon \le a_p - a_q \le \varepsilon$. Fixons alors un entier $p \ge N$. On a $a_p \le \varepsilon + a_q$ pour tout $q \ge N$; la suite $(\varepsilon + a_q - a_p)_q$ a tous ses termes positifs à partir d'un certain rang, elle est donc non-négative, il s'ensuit que le réel qu'elle définit est positif, soit $\varepsilon + x - a_p \ge 0$. De la même façon, on a $x - a_p - \varepsilon \le 0$. Finalement, pour tout $p \ge N$, on a $-\varepsilon \le x - a_p \le \varepsilon$, ce qui assure que la suite a converge vers x.

Il résulte de ce théorème que, *par construction même*, tout réel peut être vu comme limite d'une suite de rationnels.

Corollaire : **R** est *complet*, en ce sens que toute suite de Cauchy de réels converge dans **R**.

Soit en effet (x_n) une suite de Cauchy de réels, c'est à dire que :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall p,q \ge N, -\varepsilon \le x_p - x_q \le \varepsilon .$$

Par densité de **Q** dans **R**, il est possible, pour tout entier n, de trouver un rationnel a_n tel que $-\frac{1}{n} \le a_n - x_n \le \frac{1}{n}$. On vérifie alors trivialement que, comme la suite (x_n), la suite (a_n) est de Cauchy ; soit x le réel qu'elle représente. Alors le théorème précédent permet d'affirmer que la suite (a_n) converge vers x. Comme $(a_n - x_n)$ converge vers 0, on a par addition de limites (non prouvée mais évidente) que la suite (x_n) converge vers x.

5. La fin du film

L'essentiel est désormais prouvé, la suite est classique :

Théorème : toute suite croissante majorée de réels converge.

Soit (x_n) une suite croissante majorée de réels ; prouvons qu'elle est de Cauchy, donc convergente. Si elle n'était pas de Cauchy (l'écrire…), il existerait un réel $\alpha > 0$ et une suite extraite (y_n) de (x_n) telle que pour tout n, $y_{2n+1} - y_{2n} \ge \alpha$. Reste à sommer et à utiliser la croissance pour voir que $y_{2n+1} - y_0 \ge (n+1)\alpha$ ce qui empêche la suite (y_n), et donc la suite (x_n), d'être majorée.

De cela en déduit facilement le théorème de convergence des suites adjacentes, et donc le théorème des segments emboîtés. La preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass est alors classique.

Enfin, on conclut avec ce qui est souvent considéré comme l'axiome fondateur de **R** :

Théorème : toute partie non vide majorée de **R** possède une borne supérieure.

Soit X une partie non vide majorée de **R**. Soit c un élément de X, b_0 un majorant de X, et a_0 un réel vérifiant $a_0 < c$ de sorte que a_0 n'est pas un majorant de X. On envisage $d = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Si d majore X, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = d$, sinon on pose $a_1 = d$ et $b_1 = b_0$ et on recommence. On construit ainsi par récurrence une suite $([a_n, b_n])$ de segments emboîtés tels que chaque segment est l'une des deux moitiés du segment précédent et tels que a_n ne majore pas X et b_n majore X. On vérifie alors sans difficulté majeure que la limite m commune à ces deux suites est une borne supérieure de X.