Centrale PC 98

première épreuve

On note E l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ à valeurs complexes telles que, pour tout nombre réel $s > 0$,

$$\text{la fonction } u \longmapsto \frac{f(u)}{u+s} \text{ soit intégrable sur I}$$

On note $\widehat{f}$ la fonction définie sur I par la formule

$$\widehat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s} du \ .$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction $\widehat{f}$.

Partie I $-$ Etude de E

I.A Montrer que E est un $\mathbf{C}-$ espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et stable par l'application $f \longmapsto |f|$.

I.B On note L l'espace vectoriel à valeurs complexes continues et intégrables sur I. Comparer au sens de l'inclusion les espaces vectoriels L et E .

I.C Pour tout nombre réel α , on note f_α la fonction définie sur I par la formule $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α appartient à E, et prouver alors que $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle à f_α . On exprimera le coefficient de proportionalité à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

PartieII $-$ Propriétés de $\widehat{f}$

Soit f une fonction appartenant à E.

II.A Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est continue sur I.

II.B Comportement asymptotique de $\widehat{f}$ en $+\infty$

II.B.1) Déterminer la limite de $\widehat{f}$ en $+\infty$.

II.B.2) On supposede plus f intégrable sur I . Déterminer la limite, lorsque s tend vers $+\infty$, de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{\frac{u}{s}+1} du.$$

A quelle condition ce résultat permet-il d'obtenir un équivalent de $\widehat{f}$ au voisinage de $+\infty$? Donner dans ce cas cet équivalent.

II.B.3) Donner des conditions suffisantes portant sur f permettant d'obtenir un développement limité à tout ordre de la fonction $\widehat{f}$ en $+\infty$. Donner un tel développement ainsi qu'un exemple de fonction vérifiant les conditions trouvées : on pourra observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u+s} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{u^k}{s^{k+1}} + (-1)^n (\frac{u}{s})^n \frac{1}{u+s}.$$

II.C Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel h tel que $|h| < a$ établir que

$$\widehat{f}(a+h) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}} du \right) h^p$$

Que vient-on de démontrer pour $\widehat{f}$? Que peut-on en déduire ?

Partie III – Expression de $\widehat{f}$ comme transformée de Laplace

On note F le sous espace vectoriel des fonctions complexes continues sur I telles que, pour tout nombre réel $x > 0$, la fonction

$$u \longmapsto e^{-xu} f(u)$$

soit intégrable sur I. La fonction Lf définie alors par la formule

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu} f(u) du$$

s'appelle la transformée de Laplace de f.

III.A Transformée de Laplace d'un élément de E

III.A.1) Soit x un nombre réel > 0 . Justifier l'existence du nombre réel

$$M(x) = \sup_{u>0} (e^{-xu}(1+u)).$$

Comparer $M(x_1)$ et $M(x_2)$ lorsque $0 < x_1 < x_2$.

III.A.2) Montrer que E est contenu dans F.

III.A.3) Soit f une fonction appartenant à E.

a) Montrer que la fonction Lf est continue sur I. Quel est son comportement en $+\infty$?

b) Donner une condition suffisante portant sur f pour que Lf possède une limite en 0^+. Donner un exemple de fonction réelle appartenant à E telle que

$$\lim_{x \to 0, x>0} Lf(x) = +\infty$$

III.B Transformée de Laplace d'une fonction de type Lf où f appartient à E

Soit f un élément de E.

III.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction définie sur I par la formule

$$g_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-xu} f(u) du.$$

Montrer que g_n est continue sur I. Quel lien existe-t-il entre la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ et la fonction Lf ?

III.B.2) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et n un entier naturel non nul. Pour tout $s \in I$, montrer que

$$\int_a^b e^{-sx} g_n(x) dx = e^{-sa} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s} du - e^{-sb} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} du.$$

En déduire que

$$\int_a^b e^{-sx} Lf(x) dx = e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s} du - e^{-sb} \int_0^{+\infty} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s} du.$$

III.B.3) Montrer que

$$\int_a^b e^{-sx} Lf(x) dx$$

admet une limite lorsque a tend vers 0 et que b tend vers $+\infty$.

III.B.4) Montrer que Lf est élément de F et que sa transformée de Laplace est $\widehat{f}$, c'est à dire que pour tout $s \in I$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} Lf(x)dx = \widehat{f}(s)$$

1. Application. Soit α un élément de $]0,1[$. En considérant la fonction f_α définie au I.C , établirque

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du.$$

où Γ est la fonction définie sur I par la formule

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy.$$

Partie IV – Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du$

On se propose d'établir la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda}+1} du = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{-i\lambda\alpha} \tag{1}$$

où α appartient à $]0,1[$ et λ appartient à $]-\pi,\pi[$.

IV.A Etudier l'intégrabilité de

$$u \longmapsto \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda}+1}$$

sur I lorsque α appartient à $]0,1[$ et λ appartient à $]-\pi,\pi[$.

IV.B On pose

$$\gamma(\alpha,\lambda) = e^{i\lambda\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{ue^{i\lambda}+1} du,\ 0<\alpha<1,\ -\pi<\lambda<\pi$$

Montrer que, pour tout $0<\alpha<1$, la fonction $\lambda \longmapsto \gamma(\alpha,\lambda)$ est constante sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ (on pourra observer que si λ_0 est un élément de $]0,\pi[$, pour tout $u>0$ et tout $|\lambda| \leq \lambda_0$, $\left|ue^{i\lambda}+1\right|^2 \geq \left|ue^{i\lambda_0}+1\right|^2$).

IV.C En utilisant la relation $\gamma(\alpha,-\lambda) = \gamma(\alpha,\lambda)$ et la formule d'Euler

$$\sin \lambda\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\lambda\alpha} - e^{-i\lambda\alpha})$$

montrer que , pour tout $0<\lambda<\pi$,

$$\gamma(\alpha,\lambda)\sin\lambda\alpha = \sin\lambda \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{1+2u\cos\lambda+u^2} du.$$

A l'aide d'un changement de variable prouver que

$$\gamma(\alpha,\lambda)\sin\lambda\alpha = \int_{\cot an\lambda}^{+\infty} \frac{(u\sin\lambda-\cos\lambda)^\alpha}{u^2+1} du.$$

IV.C.1) En introduisant une suite d'éléments de $]0,\pi[$ convergeant vers π, obtenir la formule (1). Calculer finalement l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du$$

et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$