ALGÈBRE LINÉAIRE (1)

1. Dans **R** considéré comme un **Q**-espace vectoriel, prouver l'indépendance des vecteurs 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Prouver dans ce même espace la liberté de la famille $(\ln p)_{p \text{ premier}}$.

2. Soit **K** un corps strictement compris entre **R** et **C** au sens de l'inclusion. Prouver que **K** est un **R**-espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on en conclure ? Donner un exemple de corps intermédiaire entre **Q** et **R**.

(3.) Soit E un **R**-espace vectoriel. Prouver que E peut être muni d'une structure de **C**-espace vectoriel prolongeant celle de **R**-espace vectoriel si et seulement s'il existe un endomorphisme f de E vérifiant $f o f = -Id_E$. Est-ce le cas pour $\mathbf{R}[X]$?

4. Soit (P_n) une suite de polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$, vérifiant pour tout n de **N**, $\deg(P_{n+1}) > \deg(P_n)$. Prouver que la famille (P_n) est une base de **K**[X] si et seulement si $\deg(P_n) = n$ pour tout n.

5. Soit E un **C**-espace vectoriel. Prouver que l'on peut, de façon naturelle, munir E d'une structure de **R**-espace vectoriel. Prouver que si le **C**-espace vectoriel E est de dimension finie égale à n, alors le **R**-espace vectoriel E est de dimension finie égale à $2n$.

(6.) Soit **L** un corps fini commutatif. On note p sa caractéristique (?) et $\mathbf{K} = \{0_{\mathbf{K}}, 1_{\mathbf{K}}, 2.1_{\mathbf{K}}, \ldots, (p-1).1_{\mathbf{K}}\}$.

- **a.** Prouver que **K** est un sous-corps de **L**.
- **b.** En déduire que le cardinal de **K** est une puissance de p.
  Existe-t-il des corps finis commutatifs de cardinal 15 ?
- **c.** Construire un corps à 4 éléments.

7. Prouver la liberté des familles de fonctions suivantes :

- **a.** Dans l'espace des fonctions de **R** dans **R**, la famille $(f_\alpha)_{\alpha>0}$ avec $f_\alpha : x \mapsto \alpha^x$.
- **b.** Dans l'espace des fonctions de **R** dans **R**, la famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $f_n : x \mapsto \cos nx$.
- **c.** Dans l'espace des fractions rationnelles à coefficients réels, la famille $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $F_n = X^n\left(\dfrac{X}{1+X^2}\right)^{(n)}$.

8. Soient p et q deux projecteurs d'un **K**-espace vectoriel E, tels que $poq = 0$. Prouver que $r = p + q - qop$ est un projecteur, et déterminer son noyau et son image.

9. Soient f et g deux endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E. Prouver que $Id + fog \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow Id + gof \in \mathcal{GL}(E)$. Donner alors une expression de l'inverse de $Id + gof$ faisant intervenir l'inverse de $Id + fog$.

10. Soit u un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie E. Prouver l'équivalence entre les propositions suivantes :

i. $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ *ii.* $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$ *iii.* $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$ *iv.* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ *v.* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$

11. **a.** Prouver que la réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.

b. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, A et B deux sous-espaces de E distincts de E. Prouver que la réunion de A et de B n'est pas égale à E. En déduire, par récurrence sur $n-p$, que deux sous-espaces de dimension p possèdent un supplémentaire commun.

12. Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et A et B deux sous-espaces de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe u élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = A$ et $\operatorname{Im} u = B$.

Supposant cette condition réalisée, on note $G = \{u \in \mathcal{L}(E) / \operatorname{Ker} u = A \text{ et } \operatorname{Im} u = B\}$. Prouver que G, muni de la loi $\circ$, est un groupe si et seulement si $E = A \oplus B$.

CALCUL MATRICIEL

1. Soit la matrice $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$. En écrivant $A=I_3+B$, calculer les puissances de *A*.

2. Inverser la matrice $\begin{bmatrix}1&1&&(0)\\0&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&(0)&&1\end{bmatrix}$.

3. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ étant données, résoudre l'équation $X+tr(X)A=B$ d'inconnue X dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

4. On se place dans $E=\mathbf{R}^3$ dont la base canonique est notée $b=(i,j,k)$.
On considère l'endomorphisme *u* de *E* défini par :

$$u(i)=i-j+k \;;\; u(j)=3i+k \;;\; u(k)=-2i+j-k\,.$$

a. Écrire la matrice *A* de *u* dans la base *b*.
b. Prouver que *u* est inversible. Donner par deux méthodes la matrice de u^{-1} dans la base *b*.
c. Écrire (deux méthodes) la matrice de *u* dans la base (?) $b'=(k,i,j+k)$.
d. Donner une relation simple liant A^3, *A* et I_3. En déduire un nouveau calcul de A^{-1}.
Quelle est la dimension de l'espace $\mathrm{vect}(A^n,\ n\in\mathbf{N})$?
e. Quelle relation doit vérifier un réel *a* pour que l'équation $AX=aX$ (*X* matrice colonne) possède des solutions non nulles ? (on pourra utiliser la question **d.**).

5. On donne les deux matrices *A* et *B* suivantes :

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad;\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Prouver que *A* et *B* sont semblables (on cherchera au préalable les matrices *P* telles que $PB=AP$).

6. On se donne deux matrices carrées *A* et *B* telles que $AB=0$ et $A+B$ est inversible. Calculer $\mathrm{rg}A+\mathrm{rg}B$.

7. Soit *A* élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice supposée non inversible. On désire prouver de 4 façons essentiellement différentes l'existence de *B* non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB=0$.
a. Construire *B* en exploitant une forme équivalente à *A*.
b. Revenir aux applications linéaires.
c. Considérer l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: $\Phi: M\mapsto AM$ … quelle propriété n'a-t-il pas, et que veut-on prouver ?
d. Construire une telle matrice *B* colonne par colonne.

8. Prouver que toute matrice carrée est somme de deux matrices inversibles (on négligera le cas particulier rencontré).
Prouver qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constituée de matrices inversibles.
Quelles sont les matrices carrées qui ne sont semblables qu'à elles-mêmes ?

9. Soit *M* une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
a. Prouver que si *n* est impair, *M* n'est pas inversible.
b. Prouver que $A=I_n+M$ est inversible (si $AX=0$, calculer ${}^t(AX)(AX)$.
c. Soit $B=(I_n-M)(I_n+M)^{-1}$. Prouver que ${}^tB=B^{-1}$.

10. Trace et déterminant de l'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?

11. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et $\tilde{A}$ sa comatrice. On cherche à déterminer le rang de $\tilde{A}$ suivant le rang de A.

a. Prouver que $\mathrm{rg}(A) = n \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = n$.

b. Prouver que $\mathrm{rg}(A) \leq n-2 \Rightarrow \tilde{A} = 0$.

c. Prouver que $\mathrm{rg}(A) = n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 1$ (on majorera au préalable $\mathrm{rg}(\tilde{A})$).

d. Déterminer le déterminant de $\tilde{A}$ en fonction de celui de A.

e. Déterminer $\tilde{\tilde{A}}$.

12. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On cherche les matrices carrées M telles que $M^2 + M = A$. Soit M une solution de cette équation. On notera a et m les endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ de matrice A et M dans la base canonique.

a. Prouver que l'une des deux matrices M ou $M + I_2$ n'est pas inversible.

b. Si M n'est pas inversible, prouver que M est proportionnelle à A (on montrera que a et m ont même image et même noyau).

c. Résoudre l'équation proposée.

13. Soit $\mathcal{I}$ un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'est à dire un sous-groupe additif de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ \forall A \in \mathcal{I},\ AM \in \mathcal{I} \text{ et } MA \in \mathcal{I}.$$

a. Prouver que si une matrice A est dans $\mathcal{I}$, toutes les matrices de même rang que A sont dans $\mathcal{I}$.

b. En déduire que si $\mathcal{I}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors $\mathcal{I}$ contient la matrice élémentaire $E_{1,1}$.

c. Prouver que $\mathcal{I}$ est égal à $\{0\}$ ou à $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(14.) Incontournable ! Une matrice carrée complexe $A = (a_{i,j})$ est dite “à diagonale dominante” si pour tout i, on a $\left|a_{i,i}\right| > \sum_{j \neq i} \left|a_{i,j}\right|$. Prouver qu’une telle matrice est inversible (on pourra raisonner par contraposition, en considérant une matrice non inversible, et en écrivant une relation de dépendance linéaire de ses colonnes).

16. Calculer les déterminants n-n suivants :

$$\left|\left(\sin(a_i + a_j)\right)\right| \qquad \begin{vmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ y & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ y & \cdots & y & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 1 \end{vmatrix} \text{ et calculer } A^{-1} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{j-1} & a_1^{j+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{j-1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{j-1} & a_n^{j+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

17. Van der Monde au secours de l'Analyse

On se donne une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^n, telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées. Soit a un réel fixé.

a. Prouver que si h est un réel non nul quelconque, il est possible d'écrire :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} R \text{ où } R \text{ est un réel que l'on majorera.}$$

b. On fixe n réels non nuls et deux à deux distincts $h_1, \ldots, h_n$. Prouver l'existence de n réels $R_1, \ldots, R_n$ et d'une matrice carrée V tels que :

$$\begin{bmatrix} f(a+h_1) - \frac{h_1^n}{n!} R_1 \\ \vdots \\ f(a+h_n) - \frac{h_n^n}{n!} R_n \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(a) \end{bmatrix}.$$

c. Prouver que V est inversible, et en déduire le résultat que toutes les dérivées intermédiaires $f^{(k)}$ sont également bornées.

(13.) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f et g deux endomorphismes de E. Prouver, en complétant une base de $\operatorname{Ker} f$ en base de E, que :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = h o f\ .$$

(14.) Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E. On se propose de prouver que u possède au moins une droite ou un plan stable.

a. En envisageant la famille $(u^p)_{p\geq 0}$, prouver l'existence d'un polynôme non nul P tel que $P(u)=0$.

b. En utilisant la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles, prouver l'existence d'un polynôme Q, de degré 1 ou 2, tel que $Q(u)$ ne soit pas injectif.

c. Conclure.

15. Soient u et v deux endomorphismes d'un même espace de dimension finie E. Prouver que l'on a :

$$\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)-\dim E \leq \operatorname{rg}(v o u) \leq \inf(\operatorname{rg}(u),\operatorname{rg}(v))\ .$$

Pour l'inégalité de gauche, on pourra raisonner sur la restriction de v à $\operatorname{Im} u$.

16. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p tel que $u = p o u - u o p$.

17. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On définit l'application, manifestement linéaire,

$$\Phi_u : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ \ g \ \mapsto u o g \end{cases}.$$

a. Déterminer le noyau de Φ_u ?

b. Quand E est de dimension finie, donner la dimension du noyau de Φ_u ?

c. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. Existe-t-il toujours $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi = \Phi_u$?

18. L'espace dans lequel on se place est $E=\mathbf{R}^4$, dont on note $e=(i,j,k,l)$ la base canonique.

Avis : cet exercice est très fondamentalement primaire ! Son objectif est de vous forcer à réfléchir pour avoir les démonstrations les plus efficaces possibles, grâce au cours d'Algèbre linéaire.

On envisage l'ensemble $A=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4\ /\ x+y+z+t=0\}$.

a. Prouver que A est un sous-espace vectoriel de E, en donner la dimension ainsi qu'une base.

b. Soit x_0 le vecteur $(1,-1,0,1)$. Prouver que $E = A \oplus \mathbf{R}x_0$.

c. Donner l'image du vecteur i par la projection sur A parallèlement à $\mathbf{R}x_0$. Donner de même l'image du vecteur i par la projection sur $\mathbf{R}x_0$ parallèlement à A.

d. Soit u l'endomorphisme de E tel que $u(i)=i-j$, $u(j)=i+j-k-l$, $u(k)=-i+j$, $u(l)=j+k-2l$. Prouver que $\operatorname{Im} u = A$. Que vaut le noyau de u ?

Résoudre l'équation $u(X)=(0,1,-1,0)$.

e. L'application v suivante, de A dans $\mathbf{R}^3$, est-elle injective, surjective ? :

$$\forall X=(x,y,z,t)\in A,\ v(X)=(x+y+t,2x-y,z-t)\ .$$

Déterminer la matrice de cette application dans la base de A qui a été choisie à la question **a.**

20. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

a. Prouver que $Id_E + u$ est inversible, et déterminer son inverse.

b. Prouver que le sous-espace de $u \in \mathcal{L}(E)$ engendré par les $(id_E+u)^k$ (pour $k\in\mathbf{Z}$) est de dimension finie, et déterminer cette dimension.

c. Soient $u_1,\ldots,u_n$ n endomorphismes nilpotents et commutant deux à deux d'un même espace vectoriel E de dimension finie égale à n. Prouver que $u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_n = 0$ (on pourra raisonner par récurrence).

21. Étant donnés n réels deux à deux distincts $a_1,\ldots,a_n$ et un entier non nul k, étudier la liberté dans $\mathbf{R}[X]$ de la famille de polynômes $\left((X-a_1)^k,\ldots,(X-a_n)^k\right)$.

RÉDUCTION (1)

1. Diagonaliser ou, à défaut, trigonaliser, les matrices suivantes :

$$A=\begin{bmatrix}2&0&4\\3&-4&12\\1&-2&5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}8&-1&-5\\-2&3&1\\4&-1&-1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&-1&-\mathrm{i}&1\\-1&1&-1&1\\-\mathrm{i}&-1&\mathrm{i}&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}&(0)&&a_1\\&&&a_2\\&&&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

2. Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables :

$$A=\begin{bmatrix}-2&1&0&-1\\-1&-2&1&0\\1&0&-3&0\\0&-1&0&-1\end{bmatrix}\text{ et }B=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

3. Montrer (en s'inspirant de l'exercice **2.**) que les deux matrices suivantes sont semblables :

$$A=\begin{bmatrix}3&2&-5\\2&6&-10\\1&2&-3\end{bmatrix}\text{ et }B=\begin{bmatrix}6&20&-34\\6&32&-51\\4&20&-32\end{bmatrix}.$$

4. Prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ est semblable à une matrice de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{bmatrix}\text{ ou }\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}$$

En déduire que deux matrices non scalaires de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace et même déterminant.

5. On note $\mathrm{Com}(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A de l'exercice **2**. Déterminer $\mathrm{Com}(A)$, en donner la dimension et une base.

(6.) Étant donnée une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\mathrm{Com}(\mathcal{P})$ l'ensemble des matrices qui commutent avec tout élément de $\mathcal{P}$. On se donne par ailleurs une matrice diagonalisable A. Prouver que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(\{A\}))$ se réduit à l'algèbre engendrée par A.

7. Soient A et B deux matrices carrées réelles. Prouver que AB et BA ont les mêmes valeurs propres. Préciser ensuite ce résultat en prouvant que AB et BA ont le même polynôme caractéristique (on commencera par le cas où A est inversible). AB et BA sont-elles simultanément diagonalisables ?

8. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On note $\mathrm{Com}(u)$ l'algèbre (?) des endomorphismes de E qui commutent avec u.

a. Soit v dans $\mathrm{Com}(u)$. Prouver que les espaces propres de u sont stables par v.

b. <u>On suppose dans la suite que u est diagonalisable</u>. Prouver réciproquement que si w stabilise les espaces propres de u, alors w est dans $\mathrm{Com}(u)$. En déduire la dimension de $\mathrm{Com}(u)$.

(c.) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Com}(u)$ soit de dimension n. Prouver alors que $\mathrm{Com}(u)$ se réduit à l'algèbre des polynômes en u. Réciproque ?

9. Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ vérifiant $A^3-2A^2-A+2I_3=0$.

10. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Prouver que si A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi. Prouver que la réciproque est fausse en général, mais vraie si A est inversible. Examiner le cas des matrices réelles.

11. Soient A et B deux matrices carrées réelles, que l'on suppose semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

a. Prouver l'existence de deux matrices réelles R et S telles que :

i. la matrice $R+\mathrm{i}S$ est inversible ;

ii. on a les relations $AR=RB$ et $AS=SB$.

b. Que peut-on dire de l'application définie sur $\mathbf{C}$ par $f(t)=\det(R+tS)$?

c. Prouver que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12. (Important) Soit u un endomorphisme diagonalisable, et F un sous-espace stable par u. Prouver que la restriction de u à F est encore diagonalisable.

13. Racines carrées de matrices

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice commute avec une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts (deux démonstrations…).

b. Soit A une matrice carrée, et B une racine carrée de A. Prouver que A et B commutent.

c. Donner *toutes* les racines carrées dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ d'une matrice que l'on a diagonalisé sous la forme :

$$P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}P^{-1}.$$

d. Prouver qu'une matrice de la forme $P\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}P^{-1}$ ne possède pas de racine carrée réelle.

e. En toute généralité, quelles sont, parmi les matrices 3-3 réelles diagonales et inversibles, celles qui possèdent des racines carrées réelles ?

(14.) Soit u un endomorphisme d'un **C** espace vectoriel de dimension finie. Prouver que u possède une droite stable.

Soit u un endomorphisme d'un **R** espace vectoriel de dimension finie. Prouver que u possède une droite ou un plan stable (on pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, et envisager un éventuel facteur de degré 2 de P_u).

15. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace de dimension finie E. On suppose que u et v commutent. Prouver que u et v possèdent une base commune de diagonalisation (utiliser les résultats des exercices **8.** et **12.**).

(16.) Soient u et v deux endomorphismes d'un même **C**-espace de dimension finie E. On suppose que u et v commutent. Prouver que u et v possèdent une base commune de trigonalisation.

17. Décomposition spectrale

E est un **C** espace de dimension finie, et u un endomorphisme de E. On écrit $P_u = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont deux à deux distincts, et on pose $F_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$.

a. Prouver que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ (les F_i sont dits "sous-espaces caractéristiques" ou "spectraux" de u).

b. Prouver que chaque F_i est stable par u. En notant u_i la restriction de u à F_i, prouver que $(u_i - \lambda_i Id)^{\alpha_i} = 0$. En déduire l'existence d'une base de F_i dans laquelle la matrice de u_i est triangulaire supérieure, avec des λ_i sur la diagonale.

c. Quelle forme réduite obtient-on alors pour u ?

d. Prouver que l'on peut écrire $u = d + n$ où d est un endomorphisme diagonalisable, n un endomorphisme nilpotent, et d et n commutent.

e. Montrer en quoi la réduction spectrale permet de calculer l'exponentielle de u, contrairement à une simple réduction triangulaire par exemple.

(f) Prouver qu'une décomposition comme celle obtenue à la question **d.** est unique (elle est dite décomposition de Jordan ou de Dunford de u, selon que l'on est Français ou Anglo-Saxon).

(18.) Soit u un endomorphisme d'un **C**-espace vectoriel de dimension finie. Prouver que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace propre de u possède un supplémentaire stable par u.

19. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ telle qu'il existe n dans **N***, $A^n = I_2$.

a. Quelles sont les valeurs possibles de P_A ?

b. Prouver que $A^{12} = I_2$.

c. Généralisation ?

20. Étant donné un endomorphisme f d'un espace de dimension finie E, on définit un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ en posant, pour tout g de $\mathcal{L}(E)$, $\Phi(g) = fog$. Prouver que Φ est diagonalisable si et seulement si f l'est.

21. L'algèbre des matrices commutant avec une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ peut-elle être un corps ?

XMP 2009-2010

ESPACES EUCLIDIENS, ALGÈBRE BILINÉAIRE

1. Soient $a_1,\dots,a_n$ n réels strictement positifs. Prouver que $\sum_{i,j}\frac{a_i}{a_j}\ge n^2$.

2. **a.** Nature de la transformation géométrique de $\mathbf{R}^3$ euclidien orienté dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}8 & -1 & 4\\ 4 & 4 & -7\\ 1 & -8 & -4\end{bmatrix}.$$

b. On se donne trois réels a, b, c vérifiant $a^2+b^2+c^2=1$. Déterminer la nature de la transformation géométrique de $\mathbf{R}^3$ euclidien orienté dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\begin{bmatrix}a^2 & ab-c & ac+b\\ ab+c & b^2 & bc-a\\ ac-b & bc+a & c^2\end{bmatrix}.$$

3. Écrire la matrice de la rotation d'angle 2π/3 autour de l'axe dirigé par (1,–1,1).

4. On fixe un vecteur r de $\mathbf{R}^3$ euclidien orienté, et on considère une suite définie par récurrence par :

$$x_0\in\mathbf{R}^3,\ \text{et}\ \ \forall n\ge 0,\ x_{n+1}=r\wedge x_n.$$

Nature et somme de la série $\sum\frac{x_n}{n!}$.

Prouver que l'application $x_0\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{n!}$ est une rotation que l'on précisera.

5. Soit $A=\left(a_{i,j}\right)$ une matrice orthogonale. Prouver que $\left|\sum_{i,j}a_{i,j}\right|\le n$ (introduire le vecteur S dont les coordonnées sont toutes égales à 1 dans une base orthonormée). Cette majoration est-elle la plus fine possible ?

6. Soit u une isométrie d'un espace euclidien E. On pose $v=Id-u$.

a. Prouver que $\mathrm{Ker}v=(\mathrm{Im}v)^{\perp}$ … quel peut être l'intérêt majeur d'une telle égalité ?

b. En déduire, pour x élément de E, la limite de la suite (m_n) définie par $m_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u^k(x)$.

c. Interprétation géométrique ?

7. Prouver, *en faisant attention merci*, que les valeurs propres complexes d'une isométrie sont de module 1.

(8.) Prouver que dans un espace euclidien de dimension n, il ne peut exister $n+2$ vecteurs dont les produits scalaires deux à deux sont strictement négatifs (raisonner par récurrence). Interprétation géométrique ?

9. $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, on donne U et V deux éléments de E. Prouver alors l'égalité : $\left\|U\,{}^tV\right\|=\|U\|\|V\|$.

10. Soit A une matrice symétrique réelle telle qu'il existe p dans $\mathbf{N}^*$ tel que $A^p=I_n$. Prouver que $A^2=I_n$.

11. Soient $x_1,\dots,x_p$ p vecteurs d'un espace euclidien E. On définit leur matrice de Gram par :

$$G(x_1,\dots,x_p)=\left((x_i|x_j)\right)_{i,j}\in\mathcal{M}_p(\mathbf{R}).$$

a. Prouver que la matrice $G(x_1,\dots,x_p)$ est inversible si et seulement si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est libre.

b. Prouver plus généralement que le rang de la matrice de Gram est le même que celui de la famille de vecteurs.

c. Soit F un sous-espace de E, et $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F. Prouver que pour tout x de E, la distance d de x à F est donnée par :

$$d^2 = \frac{\det G(e_1,\dots,e_p,x)}{\det G(e_1,\dots,e_p)}.$$

12. Soient a, b, x trois vecteurs d'un espace euclidien E, x non nul. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe f dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant : $f(x)=a$ et $f^*(x)=b$.

13. Prouver que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par $\left(M\middle|N\right)=\mathrm{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire, pour lequel on déterminera une base orthonormée. On définit un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ en posant, A étant une matrice fixée, $\Phi(M)=AM$. Déterminer l'adjoint de Φ pour ce produit scalaire.

14. Incontournable :

u désignant un endomorphisme symétrique de E euclidien, exprimer la norme triple de u en fonction des valeurs propres de u. Plus généralement, si f est un endomorphisme de E de matrice A dans une base orthonormée, prouver que la norme triple de f est égale à la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${}^tAA$ (introduire l'endomorphisme $f^*\circ f$).

15. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n, supposée définie positive.

Prouver l'existence d'une décomposition (dite "de Cholevski") de A sous la forme $A={}^tTT$, où T est une matrice triangulaire supérieure. Comment utiliser cette décomposition pour résoudre l'équation $AX=B$?

16. Écrire les matrices des formes bilinéaires symétriques suivantes dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$? :

a. $B_1(X,X')=xx'+3yy'-2zz'+2xy'+2x'y-yz'-y'z$.

b. $B_2(X,X')=5xx'+3yy'+zz'-xy'-x'y+xz'+x'z-2yz'-2y'z$.

17. Prouver que le produit de deux formes linéaires indépendantes est une forme quadratique ; quelle est sa forme polaire ? La forme quadratique de matrice $A=(i+j-1)_{i,j}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est-elle le produit de deux formes linéaires indépendantes ?

18. Prouver que le déterminant est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Déterminer son noyau. Déterminer l'orthogonal (au sens de cette forme quadratique) de l'ensemble des matrices de trace nulle.

19. On appelle cône isotrope d'une forme quadratique Q l'ensemble des x tels que $Q(x)$ soit nul. Quel lien y-a- t-il entre le cône isotrope et le noyau de Q ? Prouver que si Q est positive, son noyau et son cône isotrope coïncident. Etudier la réciproque en dimension finie.

20. Soit E un espace euclidien de dimension n.

a. On se donne n vecteurs de E $x_1,\dots,x_n$ et leur matrice de Gram A (Cf. exercice **11.**). Prouver que A est une matrice symétrique positive.

b. Réciproquement, soit A une matrice symétrique n-n positive. En écrivant $A={}^tMM$, prouver qu'il existe n vecteurs de E dont A est la matrice de Gram.

c. On se donne un réel γ élément de $]0,1[$, et on considère la matrice K dont tous les termes sont égaux à γ, sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 1. Appliquer à la matrice K le résultat prouvé à la question **b.**, et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

(21.) Soient A et B deux matrices symétriques, A étant définie positive. Prouver l'existence d'une matrice inversible M et d'une matrice diagonale D telles que $A={}^tMM$ et $B={}^tMDM$.

application 1 : supposant B positive, prouver que $\det(A+B)\geq \det A+\det B$.

application 2 : supposant $Q_A \geq Q_B \geq 0$, prouver que $\det A \geq \det B$.

ESPACES PRÉHILBERTIENS

1. Prouver que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$ en posant, pour $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z')$:

$$(X|X')=xx'+5yy'+12zz'-2xy'-2x'y+xz'+x'z-5yz'-5y'z$$

(*indication :* on éliminera tour à tour chaque variable en l'incorporant à un carré).
Donner une base orthonormale pour ce produit scalaire, en n'oubliant pas que y'a pas que Schmidt dans la vie !

2. Soit E un espace préhilbertien muni de sa topologie euclidienne, et F un sous-espace vectoriel de E.

a. Prouver que le produit scalaire est continu sur $E\times E$.

b. Prouver que l'orthogonal de F est fermé, que F et son adhérence ont le même orthogonal, et que l'adhérence de F est incluse dans le double orthogonal de F.

c. En déduire que le fait que F soit fermé est une condition nécessaire pour que l'on ait $E=F\oplus F^{\perp}$.

3. L'espace E des fonctions continues sur [0,2] est muni du produit scalaire $(f|g)=\int_0^2 fg$.

a. Déterminer l'orthogonal du sous-espace F de E constitué des fonctions qui sont nulles sur [0,1].

b. Prouver que l'on a $F^{\perp\perp}=F$, mais que l'on n'a pas $E=F\oplus F^{\perp}$.

4. On munit l'espace E des fonctions continues sur [0,1] du produit scalaire (?) défini par :

$$(f|g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Prouver, pour tout entier n, l'existence d'un polynôme Q_n , unique, tel que pour tout réel x, $Q_n(\cos x)=\dfrac{\sin nx}{\sin x}$.

b. Calculer $(Q_p|Q_q)$ (les Q_n sont dits "polynômes de Tchebychev de seconde espèce").

c. Quel intérêt peut-il y avoir, dans le cadre de l'approximation des fonctions, à envisager ce produit scalaire-ci, plutôt que le produit scalaire plus "standard" $\int_{-1}^{1} fg$?

5. Soient $x_1,\dots,x_p$ p vecteurs d'un espace préhilbertien E. On définit leur matrice de Gram comme étant la matrice suivante :

$$G(x_1,\dots,x_p)=\left[(x_i|x_j)\right]_{i,j}\in\mathcal{M}_p(\mathbf{R})\ .$$

a. Prouver que si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée, la matrice $G(x_1,\dots,x_p)$ est non inversible.

b. Inversement, en supposant la matrice $G(x_1,\dots,x_p)$ non inversible, prouver que la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée (on écrira une relation de dépendance linéaire des colonnes de cette matrice)

c. Prouver plus généralement que le rang de la matrice de Gram est le même que celui de la famille de vecteurs.

d. Soit F un sous-espace de dimension finie de E, et $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F. Prouver que pour tout x de E, la distance d de x à F est donnée par :

$$d^2=\frac{\det G(e_1,\dots,e_p,x)}{\det G(e_1,\dots,e_p)}\ .$$

6. On munit l'espace $l^2(\mathbf{C})$ (constitué des suites (u_n) de complexes telles que la série $\sum|u_n|^2$ converge) du produit scalaire défini par :

$$(u|v)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{u_n}v_n\ .$$

a. Déterminer l'orthogonal du sous-espace constitué des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang.

b. Prouver que $l^2(\mathbf{C})$ est un espace de Hilbert (c'est à dire qu'il est complet pour sa norme euclidienne).