Agrégation Interne

Exercices sur les endomorphismes diagonalisables

On rappelle que si E est un ensemble à $n \geq 2$ éléments et r un entier compris entre 2 et n, un r-cycle est une permutation $\sigma \in \mathcal{S}(E)$ qui permute circulairement r éléments de E et laisse fixe les autres, c'est-à-dire qu'il existe une partie $\{x_1, \cdots, x_r\}$ de E telle que :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \cdots, r-1\}, \ \sigma(x_k) = x_{k+1} \\ \sigma(x_r) = x_1 \\ \forall x \in E \setminus \{x_1, \cdots, x_r\}, \ \sigma(x) = x \end{cases}$$

$\{x_1, \cdots, x_r\}$ est le support de σ et on note $\sigma = (x_1, \cdots, x_r)$.

Un r-cycle est d'ordre r dans le groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$ et deux r-cycles sont conjugués dans $\mathcal{S}(E)$.

Exercice 1 *À tout entier $n \geq 2$ et toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe la matrice de permutation $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie comme la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathcal{B}_\sigma = \left(e_{\sigma(k)}\right)_{1 \leq k \leq n}$.*
Pour cet exercice, σ est le cycle $\sigma = (1, 2, \cdots, n)$ et on note P pour P_σ.

1. *Montrer que $P^n = I_n$ et en déduire que P est diagonalisable.*
2. *Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de P.*
3. *Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés de P.*
4. *Montrer que, pour tout cycle γ d'ordre n dans $\mathcal{S}_n$, la matrice de permutation P_γ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.*
5. *On se donne des nombres complexes $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ et on leur associe la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & a_3 & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \left(\left(a_{i-j \bmod n}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

   Montrer que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$, puis que A est diagonalisable en précisant ses valeurs propres.

6. *Diagonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   et calculer son rayon spectral $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$, où $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A

Exercice 2 *Diagonaliser dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $n \geq 3$ *(il peut être judicieux de calculer* $\ker(A)$, $\mathrm{Tr}(A)$ *et* $\mathrm{Tr}(A^2)$*).*

Exercice 3 *On désigne, pour* $n \geq 2$, *par* $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ *l'ensemble des matrices diagonalisables dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et par* $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ *formé des matrices ayant* n *valeurs propres distinctes dans* $\mathbb{C}$.
L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est muni d'une norme quelconque.*

1. *Montrer que* $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ *est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. *Montrer que l'ensemble* $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ *des matrices diagonalisables de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *n'est pas dense dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. *Déduire le théorème de Cayley-Hamilton de la densité de* $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. *L'ensemble* $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ *est-il ouvert dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *?*
5. *On munit l'espace* $\mathbb{C}[X]$ *des polynômes à coefficients complexes de la norme définie par :*

$$\forall P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X],\ \|P\| = \max_{0 \leq k \leq m} |a_k|$$

   (a) *Soient, pour* $n \geq 1$ *fixé,* $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de polynômes dans* $\mathbb{C}_n[X]$ *avec* $P_k = \sum_{j=0}^{m} a_j^{(k)} X^j$ *et* $P = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ *dans* $\mathbb{C}_n[X]$.
   Montrer que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* P *dans* $(\mathbb{C}_n[X], \|\cdot\|)$ *si, et seulement si, chaque suite* $\left(a_j^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* a_j *dans* $\mathbb{C}$, *pour* j *compris entre* 1 *et* n.

   (b) *Soient, pour* $n \geq 1$ *fixé,* $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de polynômes unitaires de degré* n *qui converge dans* $(\mathbb{C}_n[X], \|\cdot\|)$ *vers un polynôme unitaire* P *de degré* n.
   Montrer qu'on peut alors écrire que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_k(X) = \prod_{i=1}^{n} \left(X - \lambda_i^{(k)}\right)$$

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

   où, pour tout entier i *compris entre* 1 *et* n, $\left(\lambda_i^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombre complexes qui converge vers* λ_i.

6. *Montrer que* $\mathcal{D}'_n(\mathbb{C})$ *est ouvert dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *puis que c'est l'intérieur de* $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4

1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables (l'ensemble I ayant au moins deux éléments).*
   Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation dans E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$ si, et seulement si, ces endomorphismes commutent deux à deux.
2. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe tel que tout élément de G soit d'ordre au plus égal à 2.*
   (a) *Montrer que G est commutatif.*
   (b) *On suppose de plus que G est fini. Montrer qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $\mathrm{card}\,(G) = 2^p$.*
3. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et n un entier naturel non nul.*
   (a) *Montrer que si G est un sous-groupe multiplicatif fini de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que tout élément de G soit d'ordre au plus égal à 2, alors G est commutatif de cardinal inférieur ou égal à 2^n.*
   (b) *En déduire que pour $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ les groupes multiplicatifs $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_m(\mathbb{K})$ sont isomorphes si, et seulement si, $n = m$.*
4. *On rappelle que si G est un groupe dont tous les éléments sont d'ordre fini, son exposant est $\max\limits_{g\in G} \theta(g)$, où $\theta(g)$ désigne l'ordre de g dans le groupe G.*
   Décrire les sous-groupes commutatifs d'exposant $r \geq 1$ de $GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 5 *$\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos et n est un entier naturel non nul.*
On considère A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on introduit l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\Phi_{A,B} : M \mapsto AM + MB$$

1. *On supposant que A est diagonalisable et que $B = 0$, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.*
2. *On supposant A et B diagonalisables, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.*
3.
   (a) *Montrer que pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

   $$\begin{aligned}\mathrm{Spec}\,(\Phi_{A,B}) &= \mathrm{Spec}\,(A) + \mathrm{Spec}\,(B)\\ &= \{\alpha + \beta \mid \alpha \in \mathrm{Spec}\,(A),\ \beta \in \mathrm{Spec}\,(B)\}.\end{aligned}$$

   (b) *Montrer que l'égalité $\Phi_{A,B} = 0$ avec A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ équivaut à dire que $A = -B$ est une matrice scalaire.*
   (c) *Montrer que si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, alors A et B le sont (on pourra utiliser la décomposition de Dunford-Schwarz).*
4. *Lorsque A et B sont diagonalisables, déterminer les éléments propres de $\Phi_{A,B}$ en fonction de ceux de A et de ${}^tB$.*

Exercice 6 *Soient α, β dans $\mathbb{K}$ et $A_{\alpha,\beta} = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice d'ordre n supérieur ou égal à 3 définie par :*

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \left\{\begin{array}{l} a_{ii} = \beta, \\ a_{ij} = \alpha \text{ si } j \in \{1, 2, \cdots, n\} - \{i\}. \end{array}\right.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique $P_{\alpha,\beta}$ et les valeurs propres avec leur multiplicité de la matrice $A_{\alpha,\beta}$.*
2. *Calculer le polynôme minimal $\pi_{\alpha,\beta}$ de la matrice $A_{\alpha,\beta}$ et montrer que $A_{\alpha,\beta}$ est diagonalisable.*

3. *Dans le cas où la matrice $A_{\alpha,\beta}$ est inversible, calculer son inverse.*
4. *Calculer $A_{\alpha,\beta}^k$ pour tout entier naturel k.*

Exercice 7 *On rappelle qu'une matrice complexe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite normale si $A^*A = AA^*$.*

1. *Montrer qu'une matrice complexe normale se diagonalise dans une base orthonormée.*
2. *Montrer qu'une matrice hermitienne [resp. unitaire] se diagonalise dans une base orthonormée.*
3. *Montrer qu'une matrice complexe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale si et seulement si il existe un polynôme P à coefficients complexes tel que $A^* = P(A)$.*
4. *Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe deux matrices unitaires U, V et une matrice diagonale D à coefficients réels strictement positifs telles que $A = UDV^*$ (décomposition singulière de la matrice A).*
5. *Soient A et B deux matrices hermitiennes positives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :*

$$0 \leq \mathrm{Tr}(AB) \leq \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$$

6. *Montrer que le sous groupe $U_n(\mathbb{C})$ de $GL_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unitaires est connexe par arcs.*