Ces deux problèmes, totalement indépendants, traitent avant tout des équations différentielles : linéaires dans le premier, non linéaires dans le second. Comme d'habitude, ils ont plus été choisis pour fournir de bons supports de révisions qu'en raison de leur niveau de difficulté ou de leur originalité.

Problème 1

Ce problème a pour objet l'étude des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$(E_1) \ : y'' = xy .$$

Dans la première partie, on montre que les solutions de (E_1) sont développables en série entière, et on étudie l'ordre de grandeur de l'une de ces solutions au voisinage de $+\infty$.

Dans la seconde partie, on recherche les solutions de (E_1) qui sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Enfin, la troisième partie établit l'aspect oscillatoire de toute solution de (E_1) sur $\mathbb{R}^-$.

Partie I

1. **a.** Montrer qu'il existe une unique solution de (E_1), notée *A*, telle que $A(0)=1$, et $A'(0)=0$. Montrer de même l'existence et l'unicité d'une solution *B* de (E_1) vérifiant $B(0)=0$, et $B'(0)=1$.

b. Montrer que la famille (A, B) est une base de l'espace des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** À quelles relations doit satisfaire une suite de réels (u_n) pour que la somme *S* de la série entière $\sum u_n x^n$, supposée de rayon de convergence *R* non nul, soit solution de l'équation (E_1) sur $]-R, R[$?

b. Montrer que la fonction *A* est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Expliciter le développement en série entière de *A* sous la forme $\sum a_n x^{3n}$, les a_n étant des réels strictement positifs que l'on exprimera en fonction des nombres α_n suivants :

$$\alpha_n = (1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})\dots(n-\frac{1}{3}) \text{ (avec la convention } \alpha_0 = 1).$$

On admettra de même que *B* est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que son développement peut s'écrire sous la forme $\sum b_n x^{3n+1}$ où les b_n sont des réels strictement positifs.

c. Prouver que toute solution de (E_1) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

d. Prouver que pour tout réel strictement positif *x*, on a :

$$A(x) \leq \frac{3}{2}\exp\left(\frac{x^3}{9}\right).$$

3. **a.** Prouver que A tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

b. Plus généralement, prouver que pour tout entier positif n, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{A(x)}{x^n} = +\infty$.

4. On désire préciser dans cette question l'ordre de grandeur de A.

a. On pose, pour x réel strictement positif :

$$g(x) = \exp(x^{5/4}).$$

Calculer les dérivées g' et g'' de g, et prouver l'existence d'un réel strictement positif a (que l'on ne cherchera pas à expliciter) tel que :

$$\forall x \geq a,\ g''(x) \leq xg(x).$$

b. Déterminer les signes des réels $A(a), A'(a), g(a)$ et $g'(a)$, et en déduire qu'il est possible de choisir une constante k vérifiant :

$$0 < k < \frac{A(a)}{g(a)} \text{ et } 0 < k < \frac{A'(a)}{g'(a)}.$$

On désire prouver que pour tout réel x plus grand que a, on a l'inégalité $A(x) \geq k\exp(x^{5/4})$. Pour cela, on étudie la fonction définie sur $[a,+\infty[$ par $d(x) = A(x) - kg(x)$. Il est clair que, telle qu'a été choisie la constante k, on a $d(a) > 0$. Supposons alors que d ne reste pas positive ; d étant continue, d s'annule donc, et nous noterons b la plus petite annulation de d sur $[a,+\infty[$.

c. Déterminer le signe de d'' sur $[a,b]$ (ne pas oublier que A est solution de (E_1) !) puis dresser le tableau de variations de d. Trouver une impossibilité, et conclure.

d. Plus généralement, et en analysant la démonstration précédente, déterminer des valeurs du paramètre m pour lesquelles on a, pour x assez grand, une inégalité du genre :

$$A(x) \geq K\exp(x^m) \quad \text{avec } K > 0.$$

Partie II

1. Prouver que le sous-espace des solutions de (E_1) qui sont bornées sur $[0,+\infty[$ est de dimension au plus égale à 1.

2. Soit y une solution de (E_1) sur $]0,+\infty[$, et z la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$y(x) = \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)z(x).$$

Montrer que la fonction z est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E_2)\ :\ z'' - 2\sqrt{x}z' - \frac{1}{2\sqrt{x}}z = 0\,.$$

3. On pose, pour tout réel strictement positif x :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2\sqrt{x})\ \cos\frac{t^3}{3}\mathrm{d}t\,.$$

a. Vérifier l'existence de $I(x)$ pour tout réel strictement positif x.

b. Déterminer la limite de la fonction I en $+\infty$.

c. Prouver que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et déterminer sa dérivée.

d. Prouver l'on a, pour tout réel strictement positif x :

$$I'(x) = -\int_0^{+\infty} t\exp(-t^2\sqrt{x})\sin\frac{t^3}{3}\mathrm{d}t\,.$$

e. Prouver que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, et qu'elle y est solution de l'équation (E_2).

4. **a.** Montrer que la fonction y_0 définie par :

$$y_0(x) = \exp(-\frac{2}{3}x^{3/2})\,I(x)$$

est solution de (E_1) sur $]0,+\infty[$, et déterminer la limite de y_0 en $+\infty$.

b. Que peut-on en déduire concernant l'ensemble des solutions bornées de (E_1) sur $]0,+\infty[$?

c. Déterminer un équivalent de y_0 au voisinage de $+\infty$.

Partie III

Soit Y une solution non identiquement nulle de (E_1) sur $]-\infty,0[$. On se propose d'étudier les zéros de Y. On introduit pour cela la fonction Z définie sur $]-\infty,0[$ par :

$$Z(x) = (-x)^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}\right).$$

1. Expliciter une fonction u, définie sur $]-\infty,0[$, positive et tendant vers zéro en $-\infty$, telle que la fonction Z soit solution sur $]-\infty,0[$ de l'équation différentielle :

$$Z'' = \big(x + u(x)\big)Z\,.$$

2. **a.** Soient x_0 et x_1 deux réels éléments de $]-\infty,0[$ vérifiant $x_0 < x_1$. Prouver que :

$$\left[Z'(x)Y(x)-Y'(x)Z(x)\right]_{x_0}^{x_1}=\frac{5}{16}\int_{x_0}^{x_1}\frac{Y(x)\,Z(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

b. On suppose que x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de la fonction Z sur $]-\infty,0[$, et que la fonction Y reste strictement positive sur l'intervalle $]x_0,x_1[$. Montrer que le réel $\left[Z'(x)Y(x)-Y'(x)Z(x)\right]_{x_0}^{x_1}$ a le même signe que Z sur l'intervalle $]x_0,x_1[$.

c. Déduire de ce qui précède que si x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de la fonction Z sur $]-\infty,0[$, alors Y s'annule sur $]x_0,x_1[$.

3. Montrer que Y admet dans $]-\infty,0[$ une infinité de zéros, que chaque annulation de Y se fait avec changement de signe, et que la distance entre deux zéros consécutifs de Y tend vers zéro (en un sens à préciser).

Problème 2

Le but de ce problème est d'étudier une simulation de l'évolution dans le temps d'une population de proies et de prédateurs.

Les principes, en tous points conformes à l'intuition, qui ont amené à considérer comme modèle le système différentiel que l'on va étudier, sont les suivants :

— S'il n'y a pas de prédateurs, la population de proies croît très rapidement (et même exponentiellement si l'on adopte le modèle de Fibonacci).

— S'il n'y a plus de proies, la population de prédateurs s'éteint très rapidement (exponentiellement par analogie).

— Il existe une valeur d'équilibre entre les populations, quand le nombre de proies est parfaitement adapté au nombre de prédateurs, pour laquelle les populations restent constantes.

— Lorsque le nombre de proies devient trop élevé, les prédateurs ont beaucoup à manger, ils sont contents, et ils font des tas de petits prédateurs. Leur population augmente donc, jusqu'à devenir trop importante ; la population de proies, victime de trop de prédateurs, diminue alors, elle devient trop faible, et de jeunes prédateurs meurent de faim. La population de prédateurs diminue donc, celle de proies augmente à nouveau, et on est ramené ainsi au point de départ…

Pour tenir compte de toutes ces contraintes, VOLTERRA propose le système différentiel suivant, où p désigne la population de proies, et q celle de prédateurs :

$$\begin{cases} p' = p(a-bq) \\ q' = q(-c+dp) \end{cases}$$

a, b, c, d désignent quatre constantes positives. On vérifiera que, au moins intuitivement, la loi d'évolution d'une solution de ce système obéit bien aux principes que nous nous sommes fixés, la position d'équilibre correspondant à $p_0=\dfrac{c}{d}$ et $q_0=\dfrac{a}{b}$.

En posant $p=\frac{c}{d}(1+x)$ et $q=\frac{a}{b}(1+y)$, on se ramène à l'étude des fonctions x et y qui mesurent l'écart entre les populations et leur valeur d'équilibre. Un calcul simple prouve que x et y sont solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -ay(1+x) \\ y' = cx(1+y) \end{cases}$$

Nous choisirons des valeurs initiales x_0 et y_0 toutes deux strictement plus grandes que –1 (il y a au départ à la fois des proies et des prédateurs) et non toutes deux nulles (on ne part pas du point d'équilibre), et nous noterons $F=(f,g)$ l'unique solution maximale de ce système différentiel prenant à l'instant 0 la valeur (x_0, y_0). Enfin, I désigne l'intervalle de définition de cette fonction F.

1. Prouver que f et g ne peuvent prendre la valeur –1 sur I.

2. Pour x et y dans $]-1,+\infty[$, on pose $E(x,y)=c\left(x-\ln(1+x)\right)+a\left(y-\ln(1+y)\right)$.

Prouver que $E(F(t))=E(f(t),g(t))$ reste constant quand t décrit I.

3. Étudier la fonction $u\mapsto u-\ln(1+u)$. En déduire les résultats suivants :

a. $E(x,y)=0$ si et seulement si $x=y=0$.

b. Les fonctions f et g sont bornées sur I.

4. Prouver que $I=\mathbb{R}$.

5. On suppose dans cette question que F a une limite quand t tend vers $+\infty$, notée (α,β). Prouver, en utilisant le système différentiel vérifié par F, que les seules valeurs possibles du couple (α,β) sont (0,0) et (–1,–1).

Prouver en utilisant la question **2.** que ces deux valeurs conduisent à une impossibilité.

6. On suppose dans cette question que f a une limite finie quand t tend vers $+\infty$, que l'on note m. Prouver que m ne peut valoir –1, puis que g a alors aussi une limite finie en $+\infty$. Que peut-on en conclure ?

7. Prouver que f n'est monotone sur aucun voisinage de $+\infty$. En déduire que g s'annule une infinité de fois, puis que F prend une infinité de fois la même valeur.

8. Prouver que l'évolution du système est périodique.