Université Joseph Fourier **Année 2013-2014**

UFR IM2AG **Agrégation Interne Mathématiques**

Planche d'exercices "Calcul différentiel"

Exercice 1. 1. En utilisant la définition de la différentielle d'une fonction en un point, calculer la différentielle en $(0,0)$ des applications de $\mathbb{R}^j$ $(j = 2,3))$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x,y,z) = 2 + 3z + xy + z\sin(x^2 + y^2), \quad g(x,y) = 1 + \sqrt{y^2 + 2}.$$

2. Calculer les dérivées partielles de la fonction g et montrer qu'elles sont continues.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

1. L'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

2. Calculez les dérivées partielles de f. Sont-elles continues ?

3. Pour tout $A : (a,b)$ et tout $H : (h,k)$ de $\mathbb{R}^2$, calculez directement $f'(A;H) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(A+tH)-f(A)}{t}$. L'application $H \mapsto f'(A;H)$ est-elle linéaire en H ?

Exercice 3. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{xy}{2x^2+3y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ f(0,0) &= 0. \end{cases}$$

Montrez que les dérivées partielles $D_1 f(x,y)$ et $D_2 f(x,y)$ existent pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y compris à l'origine. La fonction f est-elle continue à l'origine ?

Exercice 4. Montrez que l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x,y) &= \dfrac{5x^3y}{2x^2+3y^2} + \dfrac{x^2|y|^{3/2}}{2x^2+3y^2} \quad \text{si (x, y)} \neq (0,0), \\ \\ g(0,0) &= 0 \end{cases}$$

est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(t) = f(t, f(t, f(t,t))).$$

Calculer $\varphi'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f. Traiter l'exemple $f(t,s) = ts^2$.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x) = (a|x)\exp(-\|x\|^2).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que la différentielle de f en $x \in \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, Df(x).h = [(a|h) - 2(a|x)(x|h)]\exp(-\|x\|^2).$$

Ici $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

2. Déterminer les points critiques de f, c'est-à-dire les points x de $\mathbb{R}^n$ tels que $Df(x) = 0$.
3. Déterminer les éventuels maxima et minima de f.

Exercice 7. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par $U = (]0, +\infty[)^n$ et f l'application de U dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n + \alpha^{n+1} \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right)$$

où α est un réel strictement positif fixé.
1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (on calculera les dérivées partielles de f).
2. Déterminer le point critique de f et préciser si c'est un maximum, un minimum, un point col (ou selle).

Exercice 8. Pour $b > 0$, on définit la fonction h_b dans le demi-plan $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ par :

$$h_b(x, y) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y - b}{x}\right).$$

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\arctan(x) + \arctan(1/x)$.
2. Montrer que h_b se prolonge continûment au demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ privé du point $(0, b)$ et expliciter ce prolongement.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{h_b(x, 0)}{x} = \frac{1}{b}$.

Exercice 9. Pour une fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ on note :

$$\Delta H = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Soit U une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, à valeurs réelles. On suppose que $\Delta G(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in U$.

Montrer que G ne peut pas avoir de maximum sur U (on pourra raisonner par l'absurde en considérant un point (x_0, y_0) de U où un maximum serait atteint et introduire les fonctions $g_1 : t \mapsto g(x_0 + t, y_0)$ et $g_2 : t \mapsto g(x_0, y_0 + t)$).

Exercice 10. Notons $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\varphi\| = sup|\varphi|$.

(a) On considère la fonction F de E dans E définie par $F(\varphi) = \varphi^2$). Montrez que F est différentiable et explicitez la différentielle $DF(\varphi)$ de F au point $\varphi \in E$.

Explicitez ensuite l'application différentielle $DF : E \to E$.
(b) Traitez la même question avec $F(\varphi) = \varphi^3$.
(c) Traitez la même question avec $F(\varphi) = f \circ \varphi$ où f est une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. On note $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes.

(a) On considère l'application Φ de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$ définie par : $\Phi(M) = M^2$. Montrez que Φ est différentiable sur $M_n(\mathbb{C})$ et explicitez l'application différentielle $D\Phi$. Pourquoi ne précise t-on pas la norme choisie sur $M_n(\mathbb{C})$?
(b) Même question avec l'application Ψ définie par $\Psi(M) = M^3$.

Exercice 12. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) &= x + 2x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ si } x \neq 0 \\ \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

(a) Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 1$. Montrez que $Df(0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrez que f n'est injective sur aucun voisinage de 0.

(c) Pourquoi le théorème d'inversion locale ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 13. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

(a) Déterminez l'image de $\mathbb{R}^2$ par f.

(b) Montrez que f définit un diiféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$.

(c) Montrez que f n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.

(d) Mêmes questions avec l'application $g : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.

Exercice 14. On note S l'espace des matrices carrées symétriques $n \times n$ à coefficients réels. Etant donnée $A_0 \in S$ on appelle Φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans S définie par $\Phi(M) = {}^tMA_0M$.

(a) Montrez que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculez $D\Phi(Id)$.

(b) Déterminez le noyau et l'image de $D\Phi(Id)$.

(c) On note E l'espace des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_0M \in S$ et l'on note $\overline{\Phi}$ l'application Φ restreinte à E. Quel est le noyau et l'image de $D\overline{\Phi}$?

(d) Montrez qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de A_0 dans S tel que toute matrice $A \in \mathcal{U}$ s'écrit sous la forme $A = {}^tMA_0M$, pour une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que l'on peut choisir M dépendant de manière $\mathcal{C}^1$ de la matrice A dans $\mathcal{U}$ (c'est-à-dire qu'il existe une application Ψ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \Psi(A)$, pour tout $A \in \mathcal{U}$).