Autour des équations différentielles

On considère (dans les parties **II.** et **III.**) les équations différentielles suivantes, où q et f sont des fonctions continues, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$(E)\ :\ y'' + qy = 0\ ;$$
$$(E_f)\ :\ y'' + qy = f\ .$$

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions à valeurs réelles.

Partie I

1. I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a, b et c trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, a ne s'annulant pas. On considère l'équation différentielle $(F)\ :\ a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, et x_0 un élément de I.

En posant $u(x) = y(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t\right)$, montrer que (F) équivaut à $(F')\ :\ u'' + q(x)u = 0$ où q est une certaine fonction continue sur I.

Intérêt de cette question ?

On étudie désormais les zéros d'une équation différentielle du type de (F') .

2. Dans toute cette question, u désigne une solution non nulle sur I de l'équation différentielle $u'' + q(x)u = 0$, et l'on suppose que q est **négative ou nulle** sur I.

i. Montrer qu'il ne peut exister de réel x_0 dans I tel que $u(x_0) = u'(x_0) = 0$.

ii. Montrer que la fonction uu' est croissante sur I. En déduire que u s'annule au plus une fois sur I.

3. f et g désignent ici deux fonctions continues sur I vérifiant $\forall x \in I,\ f(x) > g(x)$. On note u_1 et u_2 des solutions respectives des équations $(E_1) : y'' + f(x)y = 0$ et $(E_2) : y'' + g(x)y = 0$.

On supposera que (x_1, x_2) est un couple d'éléments de I tels que :

$$x_1 < x_2 \quad u_2(x_1) = u_2(x_2) = 0 \quad \forall x \in \left]x_1, x_2\right[,\ u_2(x) > 0\ .$$

On suppose enfin que u_1 ne s'annule pas sur $J = \left]x_1, x_2\right[$.

i. On définit sur I la fonction $W = u_1u_2' - u_1'u_2$. Étudier les variations de W sur J.

ii. Trouver une impossibilité, et en déduire que u_1 s'annule sur J.

iii. Prouver que si x et y sont deux annulations consécutives d'une solution non nulle v de (E_2), toute solution de (E_1) s'annule entre x et y.

4. On considère l'équation différentielle $y'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$ dont on note J une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule entre 1 et 2 (on peut prouver qu'une telle solution existe !). Soit alors α un zéro de J.

a. Prouver que J s'annule dans l'intervalle $\left]\alpha, \alpha + \pi\right[$ et ne s'annule pas dans l'intervalle $\left]\alpha, \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}}\right)\alpha\right[$.

b. Prouver que les zéros de J supérieurs à α peuvent être classés en une suite strictement croissante (α_n) tendant vers $+\infty$, et que l'on a de plus $\alpha_{n+1} - \alpha_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \pi$.

Frédéric Dupré, classe de MP du lycée Camille Vernet, Valence

Partie II

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle (E_f) dans le cas particulier suivant : q est constante égale à 1 et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

b. On suppose ici $f = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = -(2+4x^2)$. Soit y une solution de (E) : $y'' - (2+4x^2)y = 0$.

On pose, pour tout $t > 0$, $z(t) = y(\sqrt{t})$, de sorte que l'on a $\forall x > 0,\ y(x) = z(x^2)$.

Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction z, et en déterminer "à vue" une solution. En déduire une solution de (E), puis la solution générale de (E) (cette dernière s'exprime avec un symbole intégrale).

On suppose dans toute la suite de cette partie (questions ***2.****,* ***3.*** *et* ***4.****) que la fonction q est constante égale à 1.*

2. **a.** Prouver que l'application $P \mapsto P + P''$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.

b. Que peut-on en déduire concernant l'équation différentielle $y'' + y = f$ dans le cas particulier où f est une fonction polynôme ?

3. **a.** Sous quelle forme la méthode de variations des constantes donne-t-elle les solutions de (E_f) ?

b. En déduire que la solution générale de (E_f) s'écrit :

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)\, f(t)\mathrm{d}t + a\cos x + b\sin x$$

où a et b sont des constantes réelles.

4. On suppose f sommable sur $\mathbb{R}^+$.

a. Prouver que la solution générale de (E_f) s'écrit :

$$y(x) = \int_x^{+\infty} \sin(t-x)\, f(t)\mathrm{d}t + \alpha\cos x + \beta\sin x$$

où α et β sont des constantes réelles.

b. En déduire que toutes les solutions de (E_f) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$, et qu'il y en a une et une seule qui tend vers 0 en $+\infty$.

Partie III

On étudie dans cette partie le comportement des solutions de l'équation (E) quand la fonction q vérifie certaines conditions de parité et de périodicité.

1. On désigne par y_1 et y_2 les solutions de (E) qui satisfont à :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \ ;\ y_1'(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \ ;\ y_2'(0) = 1 \end{cases}.$$

a. Soit y la solution de (E) prenant la valeur α en 0 et dont la dérivée vaut β en 0. Prouver que y est égale à la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$.

b. Prouver que la famille (y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des solutions de (E).

c. Quelle est la valeur de $y_1 y_2' - y_2 y_1'$?

d. Les fonctions y_1 et y_2 peuvent-elles avoir un zéro commun ?

2. Montrer que, si la fonction q est paire, la fonction y_1 est paire et la fonction y_2 est impaire (on prouvera au préalable que dans le cas où q est paire, si y est une solution de (E), l'application $t \mapsto y(-x)$ est aussi une solution de (E)).

3. On suppose que la fonction q est π-périodique.

a. Prouver que si y est une solution de (E), l'application $x \mapsto y(x+\pi)$ est aussi une solution de (E).

On définit alors trivialement un endomorphisme T de l'espace $\mathcal{S}$ en associant à une solution y de (E) la solution $T(y)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto y(x+\pi)$.

b. Montrer que T est inversible.

c. Écrire la matrice M de T dans la base (y_1, y_2) à l'aide des valeurs en π des fonctions y_1 et y_2 et de leurs dérivées. Calculer le déterminant de M et en déduire la matrice M^{-1}.

d. Écrire la matrice de T^{-1} à l'aide des valeurs en $-\pi$ des fonctions y_1 et y_2 et de leurs dérivées.

4. Déduire des questions **2.** et **3.** que si q est à la fois paire et π-périodique, les coefficients diagonaux de M sont égaux.

On suppose dans ce qui suit que q est à la fois paire et π-périodique, et l'on désigne par α la valeur commune des coefficients diagonaux de M. On suppose par ailleurs que $|\alpha| < 1$.

5. **a.** Prouver que la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b. Que peut-on dire du module des valeurs propres de la matrice M ?

c. Prouver que la suite (M^n) des puissances de M est bornée.

6. En écrivant que pour tout élément x de $[0,\pi]$ et tout entier n, on a $y_1(x+n\pi) = T^n(y_1)(x)$, prouver que y_1 est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Prouver de même que y_2 est bornée sur $\mathbb{R}$. En déduire que toute solution de (E) est bornée sur $\mathbb{R}$.

7. Montrer que la fonction $r = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2}$ n'a pas de zéro, que la fonction $\dfrac{1}{r^2}$ est minorée par une constante strictement positive, et enfin qu'aucune primitive de $\dfrac{1}{r^2}$ n'est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que la fonction y_1 a au moins un zéro sur $]0,+\infty[$ (on pourra remarquer que si tel n'était pas le cas, la fonction $\arctan\dfrac{y_2}{y_1}$ serait dérivable sur cet intervalle.)

c. Montrer que la fonction y_1 s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$. En déduire que toute solution de (E) a une infinité de zéros sur $\mathbb{R}$.

Partie IV

On considère l'équation différentielle (D) suivante, où y est une fonction inconnue de la variable réelle x :

$$(D)\ :\ y' = x^2 + y^2 .$$

0. On suppose (ce qui n'est pas le cas !) que l'on connaît une solution y_0 de (D), et l'on pose $z = y - y_0$.
Quelle équation différentielle (D') doit vérifier z pour que y soit solution de (E_1) ?
Comment, au moins en théorie, peut-on résoudre l'équation différentielle (D') ?

1. Soit φ une solution maximale de (D), et I son intervalle ouvert de définition.

a. Montrer que φ croît strictement sur I.

b. On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\varphi(x_0) > 0$.
Montrer alors que pour tout x de I vérifiant $x \geq x_0$, on a :

$$\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2} \geq 1.$$

En déduire que l'intervalle I est majoré.

c. Que peut-on dire s'il existe $x_1 \in I$ tel que $\varphi(x_1) < 0$?

d. Montrer que I est borné.

e. Déterminer l'intervalle image de I par φ.

f. Combien existe-t-il de solutions maximales impaires ?

2. On fixe un réel α ; pour tout réel β, on note $I(\beta)$ l'intervalle de définition de la solution maximale vérifiant $\varphi(\alpha) = \beta$.
Comparer les bornes des intervalles $I(\beta)$ et $I(\gamma)$ lorsque $\beta \leq \gamma$.

On désigne désormais par $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et solutions de l'équation différentielle (D'') suivante :

$$(D'')\ :\ y'' + x^2 y = 0.$$

3. Préciser la dimension de $\mathcal{S}$.

4. **a.** Déterminer les séries entières dont la somme est solution de (D''), ainsi que leur rayon de convergence.

b. En déduire l'expression, comme somme d'une série entière, des fonctions f_1 et f_2 solutions de (D'') et vérifiant respectivement les conditions :

$$f_1(0) = 1 \quad ; \quad f_1'(0) = 0 \quad ; \quad f_2(0) = 0 \quad ; \quad f_2'(0) = 1.$$

c. Soit f une fonction de $\mathcal{S}$. Exprimer f en fonction de f_1, de f_2, de $a = f(0)$ et de $b = f'(0)$.
Etudier, suivant les valeurs de a et de b, la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point $(0, a)$.

5. Montrer que f_1 est à valeurs strictement positives sur $[-2,2]$ (on pourra commencer par étudier la somme de ses quatre premiers termes).

On désigne par φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, par Φ une primitive de φ, et on pose, pour $x \in I$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\Phi(x)}.$$

6. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur φ pour que f soit solution de (E_2).

7. On suppose ici que φ est une solution maximale de (D), et on note I son intervalle ouvert de définition.

a. Déterminer les limites de f aux bornes de I.

b. On suppose φ impaire. Que peut-on dire de I ? Calculer la dérivée $\varphi^{(n)}(0)$ lorsque n n'est pas de la forme $4k + 3$.

8. Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ non identiquement nulle.

a. Soit x_0 un zéro de f. Montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f ne s'annule qu'en x_0.

b. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est borné ni supérieurement, ni inférieurement.

c. Comment varie f entre deux zéros consécutifs ?
