Ce devoir est constitué de trois problèmes totalement indépendants. Ceux-ci ne se veulent pas spécialement difficiles, mais abordent des thèmes et des résultats qu'il peut être bon de se remettre en mémoire en début d'année.

PROBLÈME 1
Approximations uniformes de fonctions continues

E désigne l'espace des fonctions numériques continues sur $I=[0,1]$, muni de la norme uniforme $\|f\| = \sup_{0\le t\le 1}|f(t)|$.

Le but de ce problème est d'étudier la densité de certains sous-espaces de E, et d'en tirer des conséquences.

Dans la partie **I**, on prouve de manière élémentaire la densité dans E de l'espace des fonctions de classe C^1.

Dans la partie **II**, on prouve la densité de l'espace des fonctions polynômes, c'est le "Théorème de Stone-Weierstrass".

Partie I

1. On fixe dans cette question un élément g de E.

a. Prouver que l'on peut prolonger g en une fonction continue sur [0,2] (que l'on notera encore g pour des raisons de commodité).

b. Soit G une primitive de g sur [0,2]. On définit, pour n entier non nul, la fonction G_n de I dans $\mathbf{R}$ par :

$$G_n : x \mapsto \frac{G(x+1/n)-G(x)}{1/n}.$$

La fonction G_n ainsi définie est donc classe C^1 sur I.

En utilisant l'uniforme continuité de g et le théorème des accroissements finis, prouver que la suite (G_n) tend vers g dans E (attention à la signification de cette phrase !). Conclure.

2. Prouver plus généralement la densité dans E du sous-espace E_k des fonctions de classe C^k, et ce pour tout $k\ge 1$.

3. Application : Lemme de Lebesgue

On veut prouver que si f est élément de E, la suite $\left(I_n(f)\right)$ définie par $I_n(f)=\int_0^1 f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ tend vers 0.

a. Prouver élémentairement ce résultat dans le cas où f est de classe C^1.

b. On suppose seulement f continue. Soit ε un réel strictement positif.

Prouver l'existence d'une fonction g de classe C^1 sur I vérifiant $\|f-g\|\le\varepsilon$.

Majorer $\left|I_n(f)-I_n(g)\right|$.

Conclure <u>soigneusement</u>.

Partie II

Polynômes de Bernstein.

Pour toute fonction f de E, on définit le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Bernstein de f, $B_n(f)$, par :

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)X^k(1-X)^{n-k} .$$

1. Déterminer les polynômes $B_n(f)$ quand f est la fonction $t\mapsto t^k$ pour $k=0,\,1,\,2$.

2. Prouver l'existence d'une suite (a_n) tendant vers zéro telle que :

$$\forall x\in I,\ \left|x^2-B_n(f)(x)\right|\le a_n \qquad (f \text{ désignant ici la fonction carré}).$$

3. Prouver que pour tout x de I, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x) .$$

4. Soit f une fonction continue sur I, $M=\|f\|$, et ε un réel strictement positif.

a. Prouver que :

$$\exists\eta>0\ /\forall x\in I,\ \forall(k,n)\in\mathbf{N}^2,\ k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\le\eta\Rightarrow\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\le\frac{\varepsilon}{2} .$$

Prouver, grâce à la relation trouvée à la question **3.**, que :

$$\forall x\in I,\ \sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\eta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{1}{4n\eta^2} .$$

b. On pose $\Delta_n(x)=\left|f(x)-B_n(f)(x)\right|$. En utilisant la valeur trouvée pour $B_n(1)$, prouver que :

$$\forall x\in I, \Delta_n(x)\le\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|<\eta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+\sum_{\left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\eta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

En déduire que :

$$\forall x\in I,\ \forall n\in\mathbf{N},\ n>\frac{M}{\varepsilon\eta^2}\Rightarrow\Delta_n(x)\le\varepsilon .$$

5. Prouver la densité dans E de l'espace des fonctions polynomiales.

6. Plus généralement, prouver pour toute fonction numérique f continue sur $[a,b]$ et pour tout réel ε strictement positif, l'existence d'un polynôme P tel que :

$$\forall x\in[a,b],\ \left|f(x)-P(x)\right|\le\varepsilon .$$

7. Une application.

Pour f et g dans E, on pose $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace de E constitué des fonctions polynômes. On se propose de déterminer son orthogonal $\mathcal{P}^\perp$ au sens du produit scalaire ci-dessus, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f telles que :

$$\forall Q \in \mathcal{P},\ \int_0^1 f(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0 .$$

a. Prouver que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

b. Soit f un élément de E. Prouver que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)B_n(f)(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t .$$

c. En déduire $\mathcal{P}^\perp$. Prouver cependant que $\mathcal{P} \neq E$. On n'a donc pas $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp$. En quoi cela n'est-il pas contradictoire avec les théorèmes du cours sur les espaces euclidiens ?

8. Critique et tentative de généralisation.

a. On se donne une fonction f continue sur $\mathbf{R}$, et l'on suppose l'existence d'une suite (P_n) de fonctions polynômes convergeant uniformément vers f sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire telle que $d_n = \sup_{t\in\mathbf{R}} \left| f(t) - P_n(t) \right| \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Prouver que pour p et q assez grands, les polynômes P_p et P_q diffèrent par une constante, et en déduire que f est un polynôme. Qu'en pensez-vous ?

b. On désigne par f la fonction $x \mapsto x^2$.

Calculer $\| f - B_n(f) \|$.

Quel commentaire cela vous inspire-t-il à propos de la qualité de l'approximation d'une fonction continue par ses polynômes de Bernstein ?

PROBLÈME 2

Théorème de Hilbert-Riesz

Le but de ce problème est d'établir un résultat très important, connu sous le nom de "théorème de Hilbert-Riesz", et dont un énoncé est le suivant : "tout espace de Hilbert est canoniquement isomorphe à son dual topologique" (effet garanti dans une conversation mondaine…). Dans la partie **I**, on prouve un théorème, important lui-aussi, dit "théorème de projection sur un convexe fermé". La partie **II** donne la preuve du théorème de Hilbert proprement dit.

Préliminaire

Soit E un espace de Banach, et (C_n) une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro. Prouver que l'intersection des C_n se réduit à un singleton (le diamètre d'une partie bornée X de E est le réel $\sup\limits_{x,y\in X} d(x,y)$).

Partie I

Le cadre de travail est celui d'un espace de Hilbert réel E, c'est-à-dire d'un **R**-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$, et qui, muni de la norme euclidienne associée $\|\;\|$, est complet. On se donne par ailleurs une partie convexe et fermée C de E. Soit x un point de E. On se propose de prouver que la distance de x à C est atteinte, et ce en un point unique, appelé projeté de x sur C.

On posera $r = d(x, C)$.

1. Pour tout entier non nul n, on note $C_n = C \cap B'(x, r + \frac{1}{n})$ l'intersection entre C et la boule fermée de centre x et de rayon $r + 1/n$. Prouver que la suite (C_n) vérifie les hypothèses du préliminaire (penser à l'identité du parallélogramme).

2. Conclure.

3. <u>Caractérisation géométrique du projeté</u>

On notera $p(x)$ le projeté de x sur C.

a. Prouver que pour tout élément z de C, on a l'inégalité $(x - p(x) | z - p(x)) \leq 0$.

(Indication : écrire que pour tout élément λ de [0,1], le vecteur $\lambda p(x) + (1-\lambda)z$ est un élément de C, et que donc sa distance à x est ...)

b. Soit réciproquement un élément y de C vérifiant, pour tout z de C, l'inégalité $(x - y | z - y) \leq 0$. Prouver que $y = p(x)$.

4. <u>Etude d'un cas particulier</u>

On suppose ici que C est un sous-espace vectoriel de E (C est donc évidemment convexe), et qu'il est fermé. x désigne toujours un élément de E, et $p(x)$ est son projeté sur C au sens qui vient d'être défini.

a. Prouver que le vecteur $x - p(x)$ est dans l'orthogonal $C^{\perp}$ de C.

b. En déduire que $E = C \oplus C^{\perp}$.

Partie II

E désigne encore dans cette partie un espace de Hilbert réel, et E' est son dual topologique, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E.

1. Soit a un élément de E, et f la forme linéaire sur E qui à un élément x de E associe le produit scalaire de x par a. Prouver que f est un élément de E', et calculer sa norme subordonnée.

Le théorème de Hilbert-Riesz affirme que, réciproquement, toute forme linéaire continue sur E est de la forme $x \mapsto (x|a)$ *où a est un bon vecteur de E. Il généralise donc le résultat classique d'isomorphisme canonique entre un espace euclidien et son dual. L'objet de la question suivante est de le prouver.*

2. Soit f un élément non nul de E'.

a. Prouver que le noyau de f est un hyperplan fermé de E.

b. Que peut-on dire de l'orthogonal du noyau de f ?

c. Construire un vecteur b de E tel que $f(x) = (x|b)$ pour tout x de E. Est-il unique ?

PROBLÈME 3

Le but de ce problème est de donner une démonstration simple et élégante du théorème de d'Alembert-Gauss, selon lequel tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ possède une racine.

Théorème de Liouville

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul (éventuellement infini), et f sa fonction somme définie sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R du plan complexe.

1. On fixe dans cette question un réel r élément de $[0, R[$. On se propose de donner deux démonstrations de l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|^2 r^{2n} .$$

a. Prouver que la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ est convergente (ce n'est pas indispensable pour traiter les deux questions suivantes).

b. Écrire, pour tout réel θ, $h(\theta) = f(re^{i\theta})$ sous forme d'une série. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction h (on vérifiera très soigneusement les hypothèses du théorème utilisé).

Conclure.

c. On veut donner ici une preuve directe de notre égalité :

Pour θ élément de $[0,2\pi]$, représenter, grâce à un produit de Cauchy, $\left|f(re^{i\theta})\right|^2$ comme somme d'une série.

Prouver que cette série peut être intégrée terme à terme par rapport à θ, et en déduire le résultat demandé.

2. On pose, toujours pour r élément de $[0, R[$, $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

Prouver, pour tout entier n, l'inégalité de Cauchy : $|a_n| \leq \dfrac{M(r)}{r^n}$.

3. On suppose dans cette question que R est égal à $+\infty$, et que f est une fonction bornée sur **C**. Prouver que f est constante (c'est ce résultat qu'un historien des sciences, bien fatigué ce jour-là, a nommé *le théorème de Liouville*, alors qu'il est dû à 100% à Cauchy…).

Le théorème de d'Alembert-Gauss grâce au théorème de Liouville

On fixe ici un polynôme P de $\mathbf{C}[X]$, non constant, et on suppose que $P(z)$ est non nul pour tout nombre complexe z. Cela permet d'envisager sur **C** la fonction $f = \dfrac{1}{P}$.

1. Prouver que $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$, et en déduire que f est bornée sur **C.**

2. On notera, pour r réel positif et n élément de **Z** :

$$g_r : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{C} \\ \theta \mapsto f(re^{i\theta}) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad c_n : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{C} \\ r \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta \end{cases}$$

a. Comment interpréter $c_n(r)$ vis-à-vis de la fonction g_r ?

b. Prouver que la fonction c_n est de classe C^1 sur **R**, et exprimer, pour tout réel r, $c_n'(r)$ sous forme d'une intégrale (bonne occasion de se remémorer ce bon vieux théorème de dérivation sous le signe $\int$)

c. Prouver que pour tout réel r et pour tout entier relatif non nul n, on a $c_n(r) = \dfrac{r}{n} c_n'(r)$.

d. En déduire, pour $r > 0$, l'expression de $c_n(r)$ en fonction de $a_n = c_n(1)$.

e. Prouver que $a_n = 0$ pour tout entier n strictement négatif.

3. Prouver que g_r est somme de sa série de Fourier.

En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est infini, et que pour tout z de **C**, on a l'égalité :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

4. Conclure.