ministère
Éducation
nationale

EAI MAT 1

SESSION 2014

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

NOTATIONS ET RAPPELS

On désigne par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers, par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.
Si n est un entier $\geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices réelles de taille n, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ celui des matrices complexes de taille n, $GL_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices réelles de taille n inversibles, $GL_n(\mathbf{C})$ le groupe des matrices complexes de taille n inversibles, $SL_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices réelles de taille n de déterminant 1.

Si A est une matrice réelle ou complexe, on note $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace, $\det(A)$ son déterminant et ${}^tA$ sa matrice transposée. Si A est une matrice complexe, on note A^* sa matrice adjointe. On désigne par I la matrice identité et aussi, par abus de notation, l'application linéaire identité.

On munit $\mathbf{R}^n$ de la structure euclidienne standard : si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$, $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$, et $\mathbf{C}^n$ de la structure hermitienne standard : si $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$, $\|z\| = (\sum_{i=1}^n |z_i|^2)^{1/2}$.

Les espaces $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont alors munis des normes matricielles associées :
pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\|M\| = sup_{\|x\|=1}\|M(x)\|$, où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et, dans le membre de droite, $\|.\|$ désigne la norme euclidienne ou hermitienne selon le cas.

On considèrera dans certaines questions $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure d'espace affine. Si $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est une application affine, on désigne sa partie linéaire par A_φ, et par M_φ la matrice de A_φ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
On désigne par $GA_n(\mathbf{R})$ le groupe des applications affines bijectives de $\mathbf{R}^n$, et $SA_n(\mathbf{R})$ son sous-groupe des applications affines dont la partie linéaire est de déterminant 1.

La première partie rassemble divers résultats préliminaires utilisés dans les autres parties ; les différentes questions de cette partie, à part les questions 1. et 2., sont indépendantes. La partie V est indépendante des parties II, III et IV.

Partie I

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Soit $F : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{C})$ une application de classe C^1 telle que :
$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F'(t) = AF(t)$ et $F(0) = I$. Démontrer que $\quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad F(t) = \exp(tA)$. (On pourra dériver la fonction : $t \mapsto exp(-tA)F(t)$.)
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $AB = BA$. Démontrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. (On pourra utiliser la question 1).
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}\,(A)}$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que sa norme, lorsqu'on la voit comme élément de $M_n(\mathbf{C})$, est égale à sa norme comme élément de $M_n(\mathbf{R})$. (On pourra observer, en le justifiant, que si $x \in \mathbf{C}^n$ est écrit sous la forme $x = x_1 + ix_2$ avec $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ alors $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.)
5. Démontrer que l'application $\tau : GA_n(\mathbf{R}) \to GL_{n+1}(\mathbf{R})$ donnée par : $\tau(\varphi) = \begin{pmatrix} M_\varphi & \varphi(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ définit un morphisme injectif de groupes.

6. Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application affine. Démontrer que φ possède un unique point fixe si et seulement si l'application linéaire $A_\varphi - I$ est bijective.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, non nulle, avec $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$.

   (a) Démontrer qu' il existe $x \in \mathbf{C}^n$ tel que x et Ax sont linéairement indépendants.

   (b) Démontrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que PAP^{-1} soit une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls. (On pourra procéder par récurrence sur n).

   (c) On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice P comme dans (b) ci-dessus avec $P \in SL_n(\mathbf{R})$.

   (d) On considère le cas $n = 2$. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ avec $\mathrm{Tr}\,(B) = 0$. Démontrer qu'il existe $Q \in SL_2(\mathbf{R})$ telle que QBQ^{-1} soit égale à une matrice de l'une des formes suivantes : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$.

Partie II

On considère la boule ouverte $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); \|M - I\| < 1\}$.

8. Soit $g \in B$, et $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre complexe de g. Démontrer que : $|\lambda - 1| < 1$. En déduire que B est contenue dans $GL_n(\mathbf{R})$.

9. Soit $G \subset GL_n(\mathbf{R})$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$ contenu dans la boule ouverte B, et $g \in G$.

   (a) Démontrer que g possède une unique valeur propre complexe, égale à 1. (On pourra considérer les puissances $g^k, k \in \mathbf{Z}$, de g).

   (b) Démontrer qu'il existe une matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $g = I + N$.

   (c) Démontrer que $g = I$.

Partie III

On appelle sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbf{R})$ une application continue $\varphi : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall s, t \in \mathbf{R} \quad \varphi(s + t) = \varphi(s)\varphi(t)$.
Soit $\varphi : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R})$ une telle application.

10. Que vaut $\varphi(0)$?

11. On suppose que, de plus, φ est de classe C^1. Démontrer que : $\forall t \in \mathbf{R}$, $\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$. En déduire la forme des sous-groupes à un paramètre de $GL_n(\mathbf{R})$ qui sont de classe C^1.

12. On revient au cas général. On pose $\Psi(t) = \int_0^t \varphi(u)du$

    (a) Démontrer que : $\forall s, t \in \mathbf{R}, \quad \Psi(s + t) = \Psi(s) + \varphi(s)\Psi(t)$.

    (b) Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $\forall t \in]0, r[$, $\Psi(t)$ est inversible.

    (c) Conclure.

13. On suppose dans cette question que φ est à valeurs dans $SL_2(\mathbf{R})$. Soit $x \in \mathbf{R}^2$ un vecteur non nul. Démontrer que l'orbite $\{\varphi(t)x, t \in \mathbf{R}\}$ de x est soit un point, soit une demi-droite, soit une droite, soit une ellipse, soit un arc d'hyperbole.

Partie IV

On rappelle que $SA_2(\mathbf{R})$ est le groupe des applications affines bijectives de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même, dont la partie linéaire est de déterminant 1. L'application τ de la question 5 identifie $SA_2(\mathbf{R})$ à un sous-groupe de $GL_3(\mathbf{R})$.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \to SA_2(\mathbf{R})$ un morphisme de groupes. On dit que φ est continu, respectivement de classe C^1 , si l'application $\tau \circ \varphi$ l'est.

Cette partie étudie les morphismes de groupes continus $\varphi : \mathbf{R} \to SA_2(\mathbf{R})$.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \to SA_2(\mathbf{R})$ un tel morphisme.

14. Démontrer que φ est de classe C^1.

15. (a) Démontrer que s'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi(t)$ possède un unique point fixe M , alors M est point fixe de tous les $\varphi(s)$, $\quad \forall s \in \mathbf{R}$.

    (b) Déterminer dans ce cas la nature des orbites $\{\varphi(s)x, s \in \mathbf{R}\}$ des éléments de $\mathbf{R}^2$.

16. On suppose que $\forall t, \varphi(t)$ est une translation. Expliciter la forme de $\varphi(t)$ et déterminer la nature des orbites $\{\varphi(t)x, t \in \mathbf{R}\}$ des éléments de $\mathbf{R}^2$.

17. On suppose que l'on n'est dans aucune des situations des questions 15 ou 16 ci-dessus. On appelle $A(t)$ la partie linéaire de $\varphi(t)$.

    (a) Démontrer qu'il existe $P \in SL_2(\mathbf{R})$ tel que $\forall t \in \mathbf{R}, PA(t)P^{-1}$ soit égal à $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    Ainsi, dans un repère convenable, $\forall t \in \mathbf{R}, \varphi(t)$ s' écrit :

    $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, \quad \varphi(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \epsilon t x_2 + u(t) \\ x_2 + v(t) \end{pmatrix}$, avec $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$.

    (b) Démontrer que : $\forall t, s \in \mathbf{R}, v(t+s) = v(t) + v(s)$. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbf{R}, v(t) = \gamma t$.

    (c) Démontrer que : $\forall t, s \in \mathbf{R}, u(t+s) = u(t) + u(s) + \epsilon s t \gamma$. En déduire la forme de $u(t)$.

    (d) Déterminer la nature des orbites $\{\varphi(t)x, t \in \mathbf{R}\}$ des éléments de $\mathbf{R}^2$.

Partie V

18. Dans chacun des cas suivants, démontrer que G est connexe par arcs (pour le cas (c), on pourra diagonaliser l'élément considéré, et s'inspirer de cette situation pour le cas $G = SO_n(\mathbf{R})$.)

    (a) $G = SL_n(\mathbf{R})$

    (b) $G = SO_n(\mathbf{R})$

    (c) $G = SU_n(\mathbf{C})$.

Tournez la page S.V.P.

19. Si G est l'un des groupes de la question précédente, on considère l'ensemble

$$\mathcal{G} = \{X \in M_n(\mathbf{K}), \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tX) \in G\}$$

avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ dans les cas (a) et (b), et $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ dans le cas (c).

Démontrer que :

(a) Si $G = SL_n(\mathbf{R})$, $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); \mathrm{Tr}\,(X) = 0\}$

(b) Si $G = SO_n(\mathbf{R})$, $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); \quad {}^tX = -X\}$

(c) Si $G = SU_n(\mathbf{C})$, $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}); \quad X^* = -X, \mathrm{Tr}\,(X) = 0\}$

On observe que, dans chacun de ces cas, $\mathcal{G}$ est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel.

20. L'application exponentielle envoie $\mathcal{G}$ dans G. Démontrer, dans chacun des cas (b) et (c) ci-dessus, que cette application est surjective. (Pour $G = SU_n(\mathbf{C})$, on pourra diagonaliser l'élément considéré, et s'inspirer de cette situation pour le cas $G = SO_n(\mathbf{R})$.)

Dans les questions 21 et 22, on suppose que G est l'un des groupes de la question 18. Il est possible, et recommandé, de donner des démonstrations uniformes (i.e. d'éviter de les traiter au cas par cas).

21. **(a)** Soit $g \in G$ et $X \in \mathcal{G}$. Démontrer que $gXg^{-1} \in \mathcal{G}$, et que l'application $G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $(g, X) \mapsto gXg^{-1}$ définit une action de G sur $\mathcal{G}$ par automorphismes linéaires.

(b) Soient $X, Y \in \mathcal{G}$. Démontrer que $XY - YX \in \mathcal{G}$.
(On pourra considérer $\exp(tX)Y\exp(-tX)$).

Dans ce qui suit, on pose $[X, Y] = XY - YX$, *et on note* $f_X : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ *l'application linéaire donnée par :* $f_X(Y) = [X, Y]$.

22. Démontrer que $\forall X, Y \in \mathcal{G}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tf_X)(Y) = \exp(tX)Y\exp(-tX)$.

23. On considère dans cette question $G = SU_2(\mathbf{C})$.

(a) Démontrer que $\mathcal{G}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 dont les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ forment une base.

(b) Exprimer les éléments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ en fonction de A, B et C.

(c) Soit $X = xA + yB + zC$, avec $x, y, z \in \mathbf{R}$, un élément de $\mathcal{G}$. Déterminer la matrice de l'application linéaire : $f_X : \mathcal{G} \to \mathcal{G}, Y \mapsto [X, Y]$, dans la base (A, B, C).

(d) Démontrer que l'application $x \mapsto \det(x)$ détermine une forme quadratique définie positive sur $\mathcal{G}$.

(e) Démontrer que l'action de G sur $\mathcal{G}$ introduite en 21. (a) détermine un morphisme de groupes surjectif de $SU_2(\mathbf{C})$ sur $SO_3(\mathbf{R})$.

(f) Ce morphisme est-il injectif ?

(g) Les groupes $SU_2(\mathbf{C})$ et $SO_3(\mathbf{R})$ sont-ils isomorphes ?

FIN DU SUJET