Agrégation interne 2009, épreuve 2
– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

- On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.
- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on note indifféremment f' ou $D(f)$ ou simplement Df sa fonction dérivée. De même, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, on note $D^n f$ sa fonction dérivée n-ème. On convient de poser $D^0 f = f$.
- On désigne par $\mathcal{L}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, a valeurs complexes et bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
- On désigne par $\mathcal{L}^1$ l'espace vectoriel des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$, a valeurs complexes et intégrables sur $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f de $\mathcal{L}^1$, on écrira indifféremment $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ pour désigner $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. On définit une norme sur cet espace en posant $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$.
- On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et si sa dérivée f' est une fonction continue.
- Les espaces S et S' sont définis au début des parties **III** et **IV** de cet énoncé.

Les candidats sont invités a énoncer précisément les théorèmes d'intégration qu'ils comptent appliquer. Ils pourront éventuellement utiliser le résultat suivant qui sera admis :

Soit une fonction u continue sur $\mathbb{R}^2$ et telle que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto u(x,y)$ est intégrable $\mathbb{R}$, et
2. la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u(x,y)|\,dy$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et
3. la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x,y)\,dy$ est continue sur $\mathbb{R}$, et
4. pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto u(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et
5. la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u(x,y)|\,dx$ est continue sur $\mathbb{R}$, et
6. la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x,y)\,dx$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors u est intégrable sur $\mathbb{R}^2$; de plus, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x,y)\,dx$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x,y)\,dx \right) dy$$

Les quatre parties s'enchaînent logiquement. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats établis dans les questions antérieures.

– I – Transformation de Fourier

1. Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1$.

   (a) Démontrer que, pour tout ξ appartenant à $\mathbb{R}$, la fonction :

   $$x \mapsto f(x)\,e^{-2i\pi x\xi}$$

   est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) On définit alors une nouvelle fonction, notée $\widehat{f}$, en notant pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$$

Démontrer que la fonction $\widehat{f}$ est continue, bornée sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $\left\|\widehat{f}\right\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

La fonction $\widehat{f}$ est appelée *transformée de Fourier* de la fonction f et est notée indifféremment $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}f$. On pourra considérer $\mathcal{F}$ comme une application de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{L}^\infty$.

2. Soit a un nombre réel strictement positif et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-a|x|}$. Vérifier que la fonction φ appartient à $\mathcal{L}^1$ et calculer sa transformée de Fourier.
3. Soient f et g deux fonctions appartenant à $\mathcal{L}^1$. Démontrer que l'on a $\int_{\mathbb{R}} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}g$.
4. Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1$ et telle que la fonction $t \mapsto t \times f(t)$, notée xf, appartienne à $\mathcal{L}^1$. Démontrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $D(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(-2i\pi xf)$.
5. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f et Df appartiennent à $\mathcal{L}^1$.

   (a) Démontrer que f admet des limites nulles au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

   (b) En déduire que pour tour ξ appartenant à $\mathbb{R}$ on a :

$$\mathcal{F}(Df)(\xi) = (2i\pi\xi)\mathcal{F}f(\xi).$$

6. **Calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne.**
   On considère la fonction γ définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma(x) = e^{-\pi x^2}$.

   (a) Justifier le fait que γ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On admettra que $\int_{\mathbb{R}} \gamma = 1$.

   (b) Pour tout ξ appartenant à $\mathbb{R}$, on note $\Omega(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$. Démontrer que la fonction Ω est constante. *Indication :* On pourra dériver la fonction Ω, ou bien intégrer suivant un chemin convenable dans le plan complexe.

   (c) En déduire que $\mathcal{F}\gamma = \gamma$.

   (d) Soit a un nombre réel strictement positif. Soit la fonction γ^a définie par $\gamma^a(x) = \gamma(ax)$; exprimer la transformée de Fourier de γ^a en fonction de $\gamma^{\frac{1}{a}}$.

– II – Convolution

1. On considère deux fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes. Démontrer que si f et g vérifient l'hypothèse :

$$(H_1) \ \ f \text{ appartient à } \mathcal{L}^\infty \text{ et } g \text{ appartient à } \mathcal{L}^1$$

alors la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que ce résultat est encore vrai si f et g vérifient l'hypothèse :

$$(H_2) \ \ f \text{ appartient à } \mathcal{L}^1 \text{ et } g \text{ appartient à } \mathcal{L}^\infty$$

Lorsque l'une au moins des deux hypothèses précédentes est vérifiée, on définit la fonction $f * g$ par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$ pour tout nombre réel x.
Cette fonction s'appelle le *produit de convolution* de f et de g.

2. Démontrer, sous l'hypothèse (H_1), que $f * g = g * f$. Dans toute la suite, l'expression $f * g$ sera utilisée en supposant que l'une des deux fonctions appartient à $\mathcal{L}^1$ et l'autre à $\mathcal{L}^\infty$ (hypothèses (H_1) ou (H_2)).
Démontrer, sous l'hypothèse (H_1), que $f * g$ appartient à $\mathcal{L}^\infty$ et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.
3. On suppose dans cette question que f et g vérifient l'hypothèse (H_1) et que, de plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que Df appartient à $\mathcal{L}^\infty$.
Démontrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $D(f * g) = Df * g$.
4. On suppose que f et g appartiennent à $\mathcal{L}^1$ et que l'une au moins des deux fonctions appartient à $\mathcal{L}^\infty$.
   (a) Démontrer que $f * g$ est dans $\mathcal{L}^1$ et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f * g = \int_{\mathbb{R}} f \times \int_{\mathbb{R}} g$.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \times \mathcal{F}g$.
5. Soit θ une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1$ et telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \theta(x)\,dx = 1$.
Pour tout nombre $\varepsilon \in \,]0,1[$ on définit la fonction θ_ε par la formule $\theta_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\theta\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, x étant un nombre réel quelconque.
Soit J un segment de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^\infty$, on veut démontrer que $f * \theta_\varepsilon$ converge vers f uniformément sur J quand ε tend vers 0, c'est-à-dire :
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{x\in J}|f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)|\right) = 0.$$
   (a) Soit un nombre $\delta > 0$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $A > 0$ tel que :
$$\int_{-\infty}^{-A} |\theta(x)|\,dx + \int_{A}^{+\infty} |\theta(x)|\,dx < \delta.$$
   (b) Démontrer, pour tout x réel fixé, que :
$$|f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\,|\theta(y)|\,dy.$$
   (c) En déduire que :
$$\sup_{x\in J}|f * \theta_\varepsilon(x) - f(x)| \leq 2\delta\,\|f\|_\infty + \int_{-A}^{A} |\theta(y)| \sup_{x\in J}|f(x-\varepsilon y) - f(x)|\,dy$$
   (d) Conclure en utilisant la continuité de f sur un compact convenablement choisi.
6. **Théorème d'inversion de Fourier.**
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ (x fixé). Soit $\varepsilon > 0$, et soit Φ_ε la fonction définie par $\Phi_\varepsilon(\xi) = e^{2i\pi x\xi - \pi\varepsilon^2\xi^2}$ pour tout ξ appartenant $\mathbb{R}$. Vérifier que cette fonction appartient à $\mathcal{L}^1$ et exprimer sa transformée de Fourier à l'aide de la fonction $\gamma_\varepsilon(y) = \dfrac{1}{\varepsilon}\gamma\left(\dfrac{y}{\varepsilon}\right)$ (la fonction γ a été définie en **I.6.**).
   (b) Soit une fonction f de l'espace $\mathcal{L}^1$; on note $\mathcal{G}(f)$ la fonction définie par $\mathcal{G}(f)(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$ pour tout ξ appartenant $\mathbb{R}$; on peut ainsi considérer $\mathcal{G}$ comme une application de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{L}^\infty$.
   On suppose que f est aussi dans $\mathcal{L}^\infty$ et que $\mathcal{F}f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $f = \mathcal{G}\left(\widehat{f}\right)$.

Indication : on pourra écrire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi_\varepsilon(\xi)\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi_\varepsilon}(y)\, f(y)\, dy$, puis faire tendre ε vers 0, et utiliser la question **II.5.**

Dans la suite la transformation $\mathcal{G}$ sera parfois notée $\mathcal{F}^{-1}$.

– III – Espace $\mathcal{S}$

On dit qu'une fonction f de variable réelle et à valeurs complexes est à *décroissance rapide* si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour chaque couple d'entiers naturels (α, β) la fonction $x \mapsto x^\alpha D^\beta f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (on rappelle que D^β désigne l'opérateur de dérivation d'ordre bêta).

Pour simplifier les choses, on notera $x^\alpha D^\beta f$ la fonction $x \mapsto x^\alpha D^\beta f(x)$.

Enfin, on note $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des fonctions à décroissance rapide.

1.
   (a) Démontrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$ et pour tous entiers naturels m, α, β, la fonction $x \mapsto (1 + |x|^m)\, x^\alpha \left(D^\beta f\right)(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

   (b) En déduire que la fonction $x^\alpha D^\beta f$ appartient à $\mathcal{L}^1$ (en particulier, on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1$).

   (c) Vérifier que le produit de deux fonctions de $\mathcal{S}$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

2. **Topologie de $\mathcal{S}$.**
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathcal{S}$ on pose :

$$p_n(f) = \max_{\substack{0 \le \alpha \le n \\ 0 \le \beta \le n}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| \right)$$

   (a) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}$. Démontrer l'inégalité :

$$p_n(f + g) \le p_n(f) + p_n(g).$$

   (b) On définit une fonction, notée σ, qui à $x \ge 0$ associe $\sigma(x) = \dfrac{x}{1 + x}$. Démontrer que σ est croissante, bornée et vérifie :

$$\sigma(x + y) \le \sigma(x) + \sigma(y)$$

   pour tous x, y positifs.

   (c) Étant données deux fonctions f, g de $\mathcal{S}$ on pose :

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sigma\left(p_n(f - g)\right).$$

   Démontrer que d est une distance sur $\mathcal{S}$ et que cette distance est invariante par translation.
   L'espace $\mathcal{S}$ sera désormais muni de la topologie définie par cette distance.

   (d) Démontrer qu'une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{S}$ converge vers 0 (la fonction nulle) pour la topologie définie par la distance d (ce qu'on pourra noter $f_i \underset{\mathcal{S}}{\to} 0$) si, et seulement si, pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$\lim_{i \to +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha D^\beta f_i(x) \right| \right) = 0$$

   pour tous entiers α, β.
   En déduire que l'application $\mathcal{I} : \begin{cases} f \mapsto f \\ \mathcal{S} \to \mathcal{L}^1 \end{cases}$ est continue.

3. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}$. Démontrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, puis que $f * g$ appartient à $\mathcal{S}$.

4. **Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$.**

   (a) Soit un élément f de $\mathcal{S}$ et un entier α.
   Démontrer que $D^{\alpha}(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}g$, où la fonction g est définie par $g(x) = (-2i\pi x)^{\alpha} f(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ (ce qu'on peut aussi écrire à l'aide la notation introduite en **I.4.** : $g = (-2i\pi)^{\alpha} x^{\alpha} f$).

   (b) Démontrer, pour tout nombre réel ξ, la formule :

   $$\mathcal{F}(D^{\alpha} f)(\xi) = (2i\pi\xi)^{\alpha} \mathcal{F}f(\xi).$$

   (c) En déduire que si f appartient à $\mathcal{S}$, alors $\widehat{f}$ appartient aussi à $\mathcal{S}$.

   (d) Démontrer que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ (toujours au sens de la topologie définie par d).

   Par abus de langage, on notera encore $\mathcal{F}$ cette application.

5. **Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}$.**
   Démontrer que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ établit une bijection de $\mathcal{S}$ sur lui même, admettant pour bijection réciproque la restriction de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{S}$.
   Par abus de langage, on notera, dans ce nouveau contexte, $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$.

– III – Espace $\mathcal{S}'$

On note $\mathcal{S}'$ le dual topologique de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$ ($\mathcal{S}$ étant muni de la distance d définie en **III.2.c.**).

1. **Quelques exemples.**

   (a) Soit δ la forme linéaire définie par $\delta(f) = f(0)$ pour $f \in \mathcal{S}$. Démontrer que $\delta \in \mathcal{S}'$.

   (b) Soit u une fonction continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}$ ou bornée. Démontrer, dans chacun de ces deux cas, que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} uf$ a un sens ; en déduire qu'on définit bien un élément de $\mathcal{S}'$, noté T_u, en posant $T_u(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} uf$ pour f appartenant à $\mathcal{S}$.
   On utilisera cette notation T_u dans toute la suite du problème.

2. **Construction d'opérateurs sur $\mathcal{S}'$.**
   Pour construire d'autres éléments de $\mathcal{S}'$ on procède de la manière suivante. On se donne tout d'abord une application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, notée L. On suppose qu'il existe une application linéaire continue L' de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ telle que pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{S}$ on ait $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} L(f)\, g = \int_{\mathbb{R}} f L'(g)$. On admettra que, dans ces conditions, l'application L' est unique.
   Enfin pour tout élément T de $\mathcal{S}'$ on pose $\underline{L}(T) = T \circ L'$.
   Justifier le fait que $\underline{L}$ est une application linéaire de $\mathcal{S}'$ dans lui même.

3. **Dérivation dans $\mathcal{S}'$.**

   (a) On choisit d'abord $L = D$ (opérateur de dérivation). Vérifier que la question **IV.2.** s'applique bien à cet opérateur et expliciter L'.

   (b) Donner alors l'expression de $\underline{D}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.

   (c) On choisit à présent $L = D^{\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 2$. Expliciter L' et $\underline{L}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.

   (d) Soit Y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $Y(x) = 1$ pour $x \geq 0$ et $Y(x) = 0$ pour $x < 0$.
   Démontrer que $\underline{D}(T_Y) = \delta$ (avec les notations δ et T_Y introduites en **IV.1.**).

4. **Multiplication par des fonctions dans $\mathcal{S}'$.**
On dit qu'une fonction P de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ est à *croissance lente* si pour tout entier $\beta \geq 0$ il existe un entier $\alpha \geq 0$ et deux nombres réels M et N tels que $\left|D^{\beta}P(x)\right| \leq (M + N|x|^{\alpha})$ pour tout x réel.
Soit L l'opérateur défini sur $\mathcal{S}$ par $L(f)(x) = P(x) \times f(x)$ (avec $f \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}$).
Démontrer que L satisfait aux hypothèses de la question **IV.2.** et préciser l'expression de L' et de $\underline{L}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$.
L'élément $\underline{L}(T)$ de $\mathcal{S}'$ sera noté $P \times T$ dans la suite.

5. **Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$.**
   (a) Démontrer que l'application L définie, pour $f \in \mathcal{S}$, par $L(f) = \widehat{f}$ (soit $L = \mathcal{F}$) vérifie les hypothèses de la question **IV.2.** ; donner l'expression de $\underline{L}(T)(f)$ pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$. L'élément $\underline{L}(T)$ de $\mathcal{S}'$ sera noté dans la suite $\widehat{T}$ ou indifféremment $\underline{\mathcal{F}}(T)$.
   (b) Donner une définition analogue pour l'application $\underline{\mathcal{G}}$ (voir question **II.6.**) et démontrer que $\underline{\mathcal{G}}$ réalise une bijection de $\mathcal{S}'$ sur lui même dont la réciproque est $\underline{\mathcal{F}}$ (voir la question **III.5.**).
   (c) On se donne une fonction $u \in \mathcal{L}^1$. Démontrer que l'on a :
$$\underline{\mathcal{F}}(T_u) = T_{\mathcal{F}(u)}.$$
   (d) Démontrer que $\underline{\mathcal{F}}(\delta) = T_{\mathbf{1}}$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$, puis que $\underline{\mathcal{G}}(\delta) = T_{\mathbf{1}}$.

6. Soit un entier $\alpha \geq 0$. On définit deux fonctions P et Q par $P(x) = (-2i\pi x)^{\alpha}$ et $Q(x) = (2i\pi x)^{\alpha}$ pour tout réel x. Soit T appartenant à $\mathcal{S}'$; démontrer les relations :
$$\underline{D}^{\alpha}(\underline{\mathcal{F}}(T)) = \underline{\mathcal{F}}(P \times T) \text{ et } \underline{\mathcal{F}}(\underline{D}^{\alpha}(T)) = Q \times \underline{\mathcal{F}}(T).$$

7. **Équation différentielle $-\underline{D}^2U + U = \delta$.**
Chercher, au moyen de la transformation de Fourier et des résultats de la question **I.2.** quelles sont les solutions $U \in \mathcal{S}'$ de l'équation différentielle $-\underline{D}^2U + U = \delta$.