Les cercles d'Apollonius [1]

1) Soit $[AB]$ un segment non réduit à un point, et k un réel strictement positif. On dit que le point M *divise le segment* $[AB]$ *dans le rapport* k s'il appartient à la droite (AB) et vérifie $\frac{MA}{MB} = k$.
Montrer que si $k \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0,1\}$ il existe exactement deux tels points.

$$M_1 = bary \begin{bmatrix} A & B \\ 1 & k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = bary \begin{bmatrix} A & B \\ 1 & -k \end{bmatrix}.$$

qu'on peut construire à la règle et au compas.
2) Le *birapport* de quatre points distincts et alignés A, B, C, D est, par définition le réel

$$[A,B,C,D] = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

et l'on dit que A, B, C, D forment une division harmonique si $[A,B,C,D] = -1$. Nous avons montré au 1) que pour $k \neq 1$, les points M_1, M_2, A, B formaient une division harmonique.
Montrer pour I milieu de $[AB]$, l'équivalence

$$[A,B,C,D] = -1 \Longleftrightarrow IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID}.$$

3) Soit $k \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0,1\}$. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ et que son centre est $bary \begin{bmatrix} A & B \\ 1 & -k^2 \end{bmatrix}$.

4) Soit ABC un triangle non isocèle. Notons a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB. Les trois cercles $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$, lieu des points M du plan qui vérifient

$$\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{MC}{MA} = \frac{a}{c}, \quad \frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}$$

sont appelés les *cercles d'Apollonius* du triangle ABC.
Montrer que les centres des cercles d'Apollonius sont alignés.

5)a) Montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en le point $I = bary \begin{bmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{bmatrix}$.
b) Montrer que deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure sont concourantes dès qu'elles sont issues de sommets différents en des points dont on déterminera les coordonnées barycentriques dans le repère ABC.
c) Montrer qu'il existe exactement quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle. un cercle intérieur au triangle dit *inscrit* et trois cercles extérieurs au triangles dits *exinscrits*.
d) Montrer que la bissectrice intérieure issue de A coupe le côté opposé $[BC]$ en un point I_A, que si le triangle n'est pas isocèle en A la bissectrice extérieure coupe la droite (BC) en un point J_A extérieur au segment $[BC]$ et qu'alors les points I_A et J_A divisent le segment$[BC]$ dans le rapport c/b.
Reconnaître le cercle de diamètre $[I_AJ_A]$.
5) Soit ABC un triangle non isocèle. La tangente en A au cercle circonscrit coupe (BC). en un point Ω_A. Montrer que le cercle de centre Ω_A et de rayon $\Omega_A A$ est un cercle d'Apollonius du triangle ABC.

[1] Apollonius de Perge géomètre et astronome grec, v.262-v.180 av. J.C.

Faisceaux de Cercles

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien éventuellement muni d'un repère orthonormé.

Rappel: Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O de rayon R, M un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ une droite coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B. Alors le produit de mesures algébriques $\overline{MA}.\overline{MB}$ est égal à $MO^2 - R^2$, il ne dépend donc pas du choix de la droite $\mathcal{D}$. On l'appelle la puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ et on le note $p_{\mathcal{C}}(M)$.

Exercice 1. Montrer que si $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et si M a pour coordonnées x et y, $p_{\mathcal{C}}(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$.

Exercice 2. Deux cercles sécants $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dits *orthogonaux* si leurs tangentes en leurs points d'intersection sont orthogonales.
Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres O et O' et de rayons R et R'. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux;
(ii) $OO'^2 = R^2 + R'2$;
(iii) $p_{\mathcal{C}}(O') = R'^2$;
(iv) $p_{\mathcal{C}'}(O) = R^2$.

Exercice 3. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles distincts. Montrer que l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ ayant même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est:

- vide si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont concentriques;
- une droite perpendiculaire à la droite des centres dans le cas contraire. Cette droite s'appelle l'*axe radical* des deux cercles.
  Ecrire l'équation de l'axe radical des cercles d'équation
  $$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$$
  quand il existe et vérifier qu'il est bien perpendiculaire à la droite des centres.

Exercice 4. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles non concentriques de $\mathcal{P}$. On appelle *faisceau* de cercles engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ l'ensemble des cercles $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ tels que l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ soit l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

1. Montrer que si $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$ sont des équations de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, le faisceau de cercles engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des cercles d'équations $\alpha f_1(x, y) + (1 - \alpha) f_2(x, y) = 0$, pour $\alpha \in \mathbf{R}$.
2. On suppose les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sécants en A et B. Montrer que le faisceau engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des cercles passant par A et B.
3. On suppose que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents en un point A. Montrer que le faisceau de cercles engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des cercles tangents en A à $\mathcal{C}_1$ et/ou $\mathcal{C}_2$.

4. Montrer qu'un cercle orthogonal à deux cercles d'un faisceau est orthogonal à tous les cercles du faisceau. En déduire que l'ensemble des cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau est un autre faisceau de cercles et que les axes radicaux de ces faisceaux sont des droites orthogonales.

   Rappel: Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$ et k un nombre réel strctement positif. L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est la médiatrice du segment $[AB]$ si $k = 1$, un cercle centré sur (AB) sinon.

5. Montrer que si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles sécants en A et B, le faisceau de cercles engendré par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des

$$\Gamma_\alpha = \{M \in \mathcal{P} \mid \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \alpha \quad [\pi]\}$$

   et le faisceau orthogonal est

$$C_\alpha = \{M \in \mathcal{P} \mid MA/MB = k\}$$

   où k est un réel strictement positif quelconque.

La droite et le cercle d'Euler[1]

Exercice 5. Soient ABC un triangle non aplati, G son centre de gravité, A', B', C' les milieux des côtés BC, CA et AB,Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre.

1. Montrer que l'homothétie $h_{G,-1/2}$ de centre G et de rapport $-1/2$ transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$.
2. Soit H l'orthocentre du triangle ABC.Montrer que les points O, G, H sont alignés. Ecrire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GO}$. La droite qui contient O, G, H s'appelle la *droite d'Euler* du triangle ABC.
3. Soient Γ' le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et soit O' son centre. Montrer que Γ' est l'image de. Γ par l'homothétie $h_{G,-1/2}$, puis que O' est le milieu de HO. En déduire que l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$ transforme Γ en Γ', puis que Γ' passe par les milieux A'', B'' et C'' des segments HA, HB et HC.
4. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{C'B'}$ et $\overrightarrow{B''C''}$, puis les vecteurs $\overrightarrow{C'B''}$ et $\overrightarrow{B'C''}$. Montrer que $C'B''C''B'$ est un rectangle. En déduire que $[C'C'']$ et $\overrightarrow{[}\ B'B'']$ sont diamètres du cercle Γ'
5. Montrer que le cercle Γ' passe par les pieds des hauteurs du triangle ABC.
   Le cercle Γ' s'appelle le *cercle des 9 points* ou le cercle d'*Euler* du triangle ABC.

[1]Leonhard Euler, mathématicien suisse (1707-1783).