Exercice 1

Soit à calculer une primitive d'un élément simple réel de seconde espèce, c'est-à-dire une intégrale de la forme :

$$\int \frac{at+b}{(t^2+pt+q)^n}\mathrm{d}t\,.$$

Un calcul de primitive non trivial

a. Justifier qu'il suffit de savoir calculer une primitive de la forme :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}\,.$$

b. Comment calculer ces primitives de proche en proche ?

Exercice 2

a. Calculer, pour *x* réel, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(2xt)\mathrm{d}t\,.$$

b. Existence et calcul de :

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\,.$$

Dérivation sous le signe somme et intégration par parties pour obtenir une équadif.
intégrations par parties successives pour obtenir une majoration satisfaisante.

Exercice 3

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$L_n(X)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X^n}\left((X^2-1)^n\right).$$

a. Prouver que les polynômes L_n sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire $\int_{-1}^{1} fg$.

Intégration par parties itérée.

b. Calculer $(L_p|L_p)$.

Exercice 4

On pose, pour *x* réel, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

a. Prouver que la fonction *f* ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses coefficients de Fourier.

Intégration par parties dans les séries de Fourier.

b. Quel calcul peut mener à des coefficients de Fourier égaux à $\frac{1}{n^2}$? Postuler alors la forme de *f* sur $[0,\pi]$.

c. Calculer *f*.

Exercice 5

5. On pose, pour x réel, $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

a. Prouver que g est définie, continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est paire. Donner la valeur de g en 0 et déterminer la limite de g en $+\infty$. On limite dans la suite l'étude de g à $\mathbb{R}_+^*$.

b. Prouver que pour tout $x>0$, on a $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x\cos t}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Une double intégration par parties sans aucun calcul.

c. Après avoir vérifié que $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right)=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right)$, donner une équation différentielle du second ordre vérifiée par g.

d. Calculer $g(x)$ pour tout réel x.

Exercice 6

On se propose de prouver l'irrationalité de π. On suppose pour cela l'existence de deux entiers positifs et premiers entre eux a et b tels que $\pi=\frac{a}{b}$.

Pour n entier naturel et x réel, on pose :

$$P_n(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad I_n=\int_0^{\pi}P_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Intégrations par parties successives pour trouver la nature arithmétique d'une intégrale.

a. Calculer $\underset{0\le x\le\pi}{\operatorname{Sup}}\left|P_n(x)\right|$ en fonction de a, b et n. Prouver que I_n est strictement positif pour tout n, et déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Pour tout entier k, la dérivée d'ordre k du polynôme P_n sera notée $P_n^{(k)}$. Par convention, $P_n^{(0)}=P_n$. Calculer en fonction de a, b, n et k les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et de $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ dans les trois cas suivants :

i. $0\le k\le n-1$ (lorsque $n\ge 1$) ;

ii. $n\le k\le 2n$;

iii. $k\ge 2n+1$.

Montrer que dans tous les cas considérés, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ sont des entiers relatifs.

c. Montrer que I_n est un entier relatif pour tout entier n et conclure.