NOTATIONS ET RAPPELS

- ▷ $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
- ▷ $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
- ▷ $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
- ▷ $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- ▷ $\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
- ▷ $\mathbf{C}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes.
- ▷ Si $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{C}_n[X]$ désigne le sous espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$, des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n.
- ▷ Pour deux réels a, b vérifiant $a \leqslant b$, on désigne par $[a, b]$ l'intervalle fermé d'extrémités a et b. $C([a,b], \mathbf{C})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$. On notera en particulier C^0 l'ensemble des fonctions à valeurs complexes continues sur $[0,1]$ et C^1 l'ensemble des fonctions à valeurs complexes de classe C^1 sur $[0,1]$. Pour $g \in C^0$, on pose $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$.
- ▷ Pour tous entiers naturels p et q vérifiant $p \leqslant q$, l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} \ / \ p \leqslant n \leqslant q\}$ est noté $[\![p, q]\!]$.
- ▷ Si $(k, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, $\dbinom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial dont la valeur est $\begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- ▷ On rappelle que si $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite complexe, $\sum\limits_{k\in\emptyset} u_k = 0$.

Notations

- ▷ **Dans tout le problème**, f désigne une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs complexes.
- ▷ Pour $(k, n) \in \mathbf{N}^2$ on appelle k-ème polynôme de Bernstein d'ordre n le polynôme $B_{k,n}$ donné par :

$$B_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$$

- ▷ On considérera dans ce problème un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On rappelle qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0, 1\}$. On dit que $p \in [0,1]$ est le paramètre de cette loi si $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X^{-1}\{1\}) = p$.
- ▷ On considérera $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires, réelles, indépendantes et identiquement distribuées suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre x, où $x \in [0,1]$.

  Pour n entier naturel non nul on notera $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \frac{S_n}{n}$.
- ▷ Pour X variable aléatoire réelle, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ son espérance mathématique et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
- ▷ Soit $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et Y des variables aléatoires réelles, de fonctions de répartition respectives F_k et F. On rappelle que $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers Y si, en tout point x où F est continue, la suite $(F_k(x))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers $F(x)$.
- ▷ Soit $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et Y des variables aléatoires réelles. On dit que $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge en moyenne quadratique vers Y si la suite $(\mathbb{E}((Y_k - Y)^2))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Partie I : Une démonstration probabiliste du théorème de Weierstrass

1. Donner, en la justifiant, la loi de S_n.
2. Déduire de ce premier résultat les propriétés suivantes (seules des démonstrations utilisant la question précédente seront acceptées ici) :

   (a) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}, 0 \leqslant B_{k,n}(x) \leqslant 1,$

(b) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}, B_{k,n}(x) = B_{n-k,n}(1-x)$,

(c) et les valeurs de :

i. $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{k,n}(x)$,

ii. $\sum\limits_{k=0}^{n} kB_{k,n}(x)$,

iii. $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_{k,n}(x)$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$ calculer $\mathbb{P}(S_n = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(S_{n-1} = k)$ et $\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1)$, et en déduire l'expression de $B_{k,n}$ en fonction de $B_{k,n-1}$ et $B_{k-1,n-1}$.

4. Pour $n > 0$, on définit une application B_n de C^0 vers $\mathbf{C}[X]$ par

$$\forall g \in C^0, \quad B_n(g) = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}.$$

(a) Montrer que $(B_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

(b) Montrer que la restriction de B_n à $\mathbf{C}_n[X]$ induit un automorphisme linéaire $\overline{B}_n$ de $\mathbf{C}_n[X]$.

(c) Montrer que

$$\forall P \in \mathbf{C}[X], \exists Q \in \mathbf{C}[X], \exists n \in \mathbf{N}, P = B_n(Q).$$

Un tel Q est-il unique ?

5. On rappelle ici que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, que $T_n = \frac{S_n}{n}$ et que les variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre x.
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(f(T_n)) = B_n(f)(x)$$

puis que

$$B_n(f)(x) - f(x) = \mathbb{E}(f(T_n) - f(\mathbb{E}(T_n))).$$

6. Montrer que $\forall \delta > 0, \mathbb{P}(|T_n - x| \geqslant \delta) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$.

7. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans un ensemble fini et φ une fonction définie et convexe sur un intervalle contenant $X(\Omega)$. On suppose de plus que X et $\varphi(X)$ possèdent une espérance. Montrer qu'alors

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

8. Déduire de ce qui précède que $(B_n(f))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f.

9. Démontrer le théorème de Weierstrass :
Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$. Si g est continue sur $[a,b]$, alors g est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.

10. Montrer que ce résultat n'est pas valable si on remplace $[a,b]$ par $\mathbf{R}$.