Faisceaux de cercles

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2bx + c = 0$.

ex1: puissance d'un point par rapport à un cercle

a) Soit un point P. Si une droite $\mathcal{D}$ passant par P coupe $\mathcal{C}$ en deux points M et M', montrer que $\overline{PM}.\overline{PM'}$ est indépendant de $\mathcal{D}$ et qu'il est égal à $PO^2 - r^2$ où r est le rayon du cercle $\mathcal{C}$. On le note $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P)$ et on l'appelle la puissance du point P par rapport à $\mathcal{C}$.

b) Montrer que si $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en T, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P) = PT^2$.
Régionner le plan en fonction du signe de $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P)$.

c) Montrer que les quatre points A, B, C, D tels que (AB) et (CD) soient sécantes en I sont cocycliques si et seulement si $\overline{IA}.\overline{IB} = \overline{IC}.\overline{ID}$

d) Soit $P(x, y)$. Montrer $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$.

ex2: axe radical de deux cercles

a) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques, de centres respectifs O et O'. Montrer que l'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à ces deux cercles est une droite orthogonale à (OO'). Cette droite s'appelle l'axe radical des deux cercles.

b) Déterminer l'ensemble des points du plan dont les puissances par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' diffèrent d'une constante k donnée.

c) Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$' et $\mathcal{C}$" trois cercles de centres distincts. Déterminer l'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à ces trois cercles.
d) Soient $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ et $x^2 + y^2 + 12x + 2\lambda y + 36 = 0$ les équations de deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$'. Ecrire l'équation de leur axe radical, déterminer λ pour que les deux cercles soient tangents et préciser alors leur point de contact.

ex3: cercles orthogonaux

On dit que deux cercles sécants $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthogonaux si les tangentes à ces deux cercles en l'un de leurs points d'intersection sont orthogonales.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles soient orthogonaux faisant intervenir les rayons de ces deux cercles et la distance de leurs centres.

b) Soient $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$ les équations des deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$'. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a,a',b,b',c,c' pour que ces cercles soient orthogonaux.

ex4: faisceaux de cercles

Etant donnés deux cercles non concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$', d'axe radical (Δ), on appelle faisceau de cercles engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' l'ensemble des cercles (Γ) du plan tels que l'axe radical de $\mathcal{C}$ et (Γ) soit égal à (Δ)

a) Montrer que si $\mathcal{C}$ rencontre (Δ) en deux points A et B, le faisceau de cercles engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' est l'ensemble des cercles passant par A et B. On dit alors que A et B sont les "points de base" du faisceau.

On note, pour tout $\alpha \in [0, \pi[, (\Gamma_\alpha)$ l'ensemble des points M du plan vérifiant $(\widehat{MA, MB}) = \alpha$ mod. π. Montrer que le faisceau de cercles de points base A et B est l'ensemble des cercles (Γ_α) quand α décrit $]0, \pi[$.

b) Décrire le faisceau quand (Δ) est tangent à $\mathcal{C}$.

c) Montrer que si un cercle est orthogonal à deux cercles distincts d'un faisceau, il est orthogonal à tous les cercles du faiceau.

d) Montrer que si deux cercles non concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ne se coupent pas, il existe un faisceau de cercles à points de base tel que le faiceau engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soit l'ensemble des cercles du plan orthogonaux à tout cercle de ce faisceau.

Soient A et B ces points de base. Pour tout réel positif α, on note (C_α) l'ensemble des points M du plan vérifiant MA/MB=α. Montrer que le faisceau engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' est l'ensemble des cercles $\mathcal{C}_\alpha$ pour $\alpha \neq 1$.

e) Soient $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ les équations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$'. Montrer qu'un cercle appartient au faisceau engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' si et seulement si son équation peut s'écrire sous la forme $\lambda f(x, y) + \mu g(x, y) = 0$ pour deux réels λ et μ.